Suatu Sifat Matriks atas Daerah Bézout

Muhamad Ali Misri[1]
[1]IAIN Syekh Nurjati Cirebon
[1]alimisri@syekhnurjati.ac.id

Abstrak

Tulisan ini membahas masalah faktorisasi matriks bujur sangkar atas daerah Bézout. Pada tulisan ini dijelaskan bahwa matriks bujur sangkar singular berukuran $n \times n$ merupakan hasil kali matriks idempoten jika pada ukuran 2×2 juga seperti demikian. Sifat tersebut selanjutnya dikaitkan dengan endomorfisma modul atas daerah Bézout.

2010 Mathematics Subject Classification: *13G05,13A99,13C10,13F99*

Kata kunci: *Bézout, endomorfisma, matriks singular bujur sangkar*

I. Pendahuluan

Suatu gelanggang dengan unsur kesatuan disebut daerah integral jika gelanggang tersebut tidak memuat pembagi nol, ditulis: R. Konsep gelanggang, khususnya daerah integral, mendasari kajian matriks dan faktorisasinya. Ada dua masalah faktorisasi matriks atas daerah integral R yang ramai dibicarakan sejak pertengahan tahun 1960 [1]. Permasalahan tersebut berkaitan dengan matriks bujur sangkar *invertible* dan matriks bujur sangkar singular. Masalah pertama mencari kelas pada daerah integral R yang mengakibatkan setiap matriks bujur sangkar *invertible* atas R merupakan hasil kali matriks elementer. Masalah kedua mencari kelas pada daerah integral R yang mengakibatkan setiap matriks bujur sangkar singular atas R merupakan hasil kali matriks idempoten.

Ketika R berupa lapangan, eleminasi Gauss menghasilkan faktorisasi matriks *invertible* dalam matriks-matriks elementer. Penelitian tersebut diperdalam oleh Cohn pada beberapa kelas daerah integral [2]. Sementara masalah kedua diteliti oleh Howie (1966) dan kemudian dilanjutkan oleh Erdos (1967) dan Dawlings (1981). Pada tahun 1991, Fountain kembali mengembangkan hasil tersebut untuk transformasi linier ruang vektor [3]. Adapun hasil tersebut seperti berikut ini.

Teorema 1. $(Fountain, 1991\ [3])$
Misalkan R suatu daerah ideal utama dan $n \geq 2$ suatu bilangan bulat. Pernyataan berikut ekuivalen.

(ID_n) *Setiap matriks bujur sangkar singular berukuran $n \times n$ dengan rank $n-1$ dan entrinya anggota R merupakan hasil kali matriks idempoten dengan rank $n-1$.*

(H_n) *Untuk setiap endomorfisma α dari R^2 dengan rank $n-1$, ada endomorfisma β dengan $Ker\,(\beta) = Ker\,(\alpha)$ dan $Im\,(\beta) = Im\,(\alpha)^*$ sehingga β merupakan hasil kali homomorfisma idempoten dengan rank $n-1$.*

$Im\,(\alpha)^*$ menyatakan *pure closure* dari submodul $Im\,(\alpha)$ dari R^n.

Gelanggang R disebut Bézout jika setiap ideal atas R yang dibangun secara hingga adalah utama. Khususnya, untuk gelanggang R berupa daerah integral, disebut daerah Bézout. Beberapa tahun terakhir, Salce dan Zanardo (2014) mengangkat kembali masalah faktorisasi matriks, sebagai perluasan Teorema 1, dengan studi kasus pada daerah Bézout [1]. Hasil tersebut menjadi inti bagian bahasan utama.

II. Bahasan Utama

Pada bagian pendahuluan disinggung bahwa R menyatakan daerah integral. Sebelum masuk pada bagian pembahasan, ada beberapa istilah yang perlu diketahui seperti disajikan dalam uraian berikut ini.

Untuk suatu daerah integral R dan bilangan bulat $n \geq 2$, tanda R^n menyatakan R-modul bebas yang anggotanya berupa vektor kolom $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \cdots v_n]^T$ dengan $v_i \in R$. $M_n(R)$ menyatakan R-aljabar matriks berukuran $n \times n$ yang setiap entrinya berada di R. Misalkan $\mathbf{M} \in M_n(R)$. Matriks $\mathbf{M}$ disebut singular jika $det(\mathbf{M}) = 0$.

Proposisi 2. *Misalkan R suatu daerah integral, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ suatu matriks tak nol dan non-identitas dengan $a, b, c, d \in R$. Matriks $\mathbf{T}$ idempotent jika dan hanya jika $d = 1 - a$ dan $a(1-a) = bc$.*

Misalkan $\mathbf{T}$ suatu matriks berukuran 2×2 atas R. Matriks $\mathbf{T}$ disebut matriks kolom-baris jika terdapat $a, b, x, y \in R$ demikian sehingga matriks T dapat dinyatakan seperti berikut.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{bmatrix}.$$

Proposisi 3. *Misalkan R suatu daerah integral. Jika $\mathbf{T}$ suatu matriks singular di $M_2(R)$ demikian sehingga ideal atas R yang dibangun oleh entri-entri dari baris pertamanya adalah utama, maka $\mathbf{T}$ merupakan matriks kolom-baris. Khususnya, jika $\mathbf{T}$ matriks kolom-baris idempoten, maka pernyataan konversnya juga benar.*

Ingat kembali bahwa daerah Bézout adalah daerah integral yang setiap ideal yang dibangun secara hingganya itu utama. Pandang gelanggang $\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$, suku banyak atas $\mathbb{Q}$ yang suku konstantanya dalam $\mathbb{Z}$. Gelanggang ini merupakan contoh standar daerah Bézout non-lokal yang bukan termasuk daerah ideal utama. Hal ini terjadi mengingat ideal $x\mathbb{Q}[x]$ tidak dibangun secara hingga.

Teorema 4. *Misalkan R suatu daerah Bézout. Jika setiap matriks singular berukuran 2×2 yang setiap entrinya di R merupakan hasil kali matriks-matriks idempoten, maka setiap matriks singular berukuran $n \times n$ yang setiap entrinya di R juga merupakan hasil kali matriks-matriks idempoten.*

Teorema di atas dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema II.1 dalam Newman [4] kemudian menggunakan [5, Lemma 1].

Lema 5. *Misalkan R suatu daerah integral, $a, b, x, y \in R$. Matriks* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{bmatrix}$ *adalah hasil kali matriks idempoten ketika matriks* $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan hasil kali idempoten.*

Akhirnya dengan menggunakan Proposisi 2, Proposisi 3, Teorema 4 dan Lema 5 diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 6. *Untuk suatu daerah Bézout R, sifat (H_2) ekuivalen dengan sifat (ID_2). Dalam kasus ini, sifat (ID_n) juga terpenuhi, untuk setiap $n \geq 0$.*

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dibiayai oleh DIPA IAIN Syekh Nurjati Cirebon Tahun 2018. Penulis berterima kasih atas masukan dan saran perbaikan terhadap naskah ini khususnya kepada reviewer dan editor. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada IAIN Syekh Nurjati atas dukungannya terhadap penelitian ini, khususnya FITK (Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan) dan LP2M.

Referensi

[1] Salce Luigi, Paolo Zanardo, Products of elementary and idempotent matrices over integral domain, *Linear Algebra and its Applications*, **452**(), (2014), 130–152

[2] P.M. Cohn, On the structure of the GL_2 of a ring, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **30**, (1966), 5–53

[3] J. Fountain, Product of idempotents integer matrices, *Math. Cambridge Philos. Soc.*, **110**, (1991), 431–441

[4] M. Newman, *Integral matrices*, Pure Appl. Math.,**45**, Academic Press, Newyork-London, 1972.

[5] T.J. Laffey, Product of idempotent matrices, *Linear Multilinear Algebra*, **14**(4), (1983), 309–314