REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Menteri Hukum dan Hak Asasi Manusia Republik Indonesia, berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta yaitu Undang-Undang tentang perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra (tidak melindungi hak kekayaan intelektual lainnya), dengan ini menerangkan bahwa hal-hal tersebut di bawah ini telah tercatat dalam Daftar Umum Ciptaan:

I.	Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201706295, 6 Desember 2017
II.	Pencipta		
	Nama	:	**Muhamad Ali Misri**
	Alamat	:	Jl. A. Yani Rt.02 Rw. 03 Kp. Sarakan Ds. Pisangan Jaya Kec. Sepatan, Tangerang, BANTEN, 15520
	Kewarganegaraan	:	Indonesia
III.	Pemegang Hak Cipta		
	Nama	:	**Muhamad Ali Misri**
	Alamat	:	Jl. A. Yani Rt.02 Rw. 03 Kp. Sarakan Ds. Pisangan Jaya Kec. Sepatan, Tangerang, BANTEN, 15520
	Kewarganegaraan	:	Indonesia
IV.	Jenis Ciptaan	:	Modul
V.	Judul Ciptaan	:	**Modul Praktikum Aljabar Abstrak 2**
VI.	Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	6 Desember 2017, di Cirebon
VII.	Jangka waktu perlindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
VIII.	Nomor pencatatan	:	05702

Pencatatan Ciptaan atau produk Hak Terkait dalam Daftar Umum Ciptaan bukan merupakan pengesahan atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang dicatat. Menteri tidak bertanggung jawab atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang terdaftar. (Pasal 72 dan Penjelasan Pasal 72 Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta)

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
REPUBLIK INDONESIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL
u.b.
DIREKTUR HAK CIPTA DAN DESAIN INDUSTRI

Dr. Dra. Erni Widhyastari, Apt., M.Si.
NIP. 196003181991032001

MODUL PRAKTIKUM ALJABAR ABSTRAK 2

Disusun Oleh
Dr. Muhamad Ali Misri, M.Si

TADRIS MATEMATIKA
INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI
(IAIN) SYEKH NURJATI CIREBON
2016

MODUL PRAKTIKUM ALJABAR ABSTRAK 2
MENGGUNAKAN APLIKASI MAPLE

Disusun oleh
Muhamad Ali Misri, M. Si
NIP. 19811030 201101 1 004

PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
IAIN SYEKH NURJATI CIREBON
TAHUN 2016

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanya untuk Allah semata, Tuhan yang menguasai seluruh alam dan ilmu pengetahuan yang sangat luas ini, karena berkat rahmat dan hidayah yang tak berhingga banyaknya Allah berikan, penulis dapat menyelesaikan penyusunan Modul Praktikum Aljabar Abstrak 2.

Penyusunan modul praktikum ini bertujuan untuk membantu, mahasiswa dalam memvisualisasikan dan menyelesaikan masalah terkait aljabar abstrak.

Penulis menyadari bahwa penyusunan modul praktikum ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu penulis mengharapkan masukan baik berupa kritik, saran, maupun koreksi yang membangun sehingga modul praktikum ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Cirebon, September 2016
Penyusun,

Muhamad Ali Misri M. Si.
NIP. 19811030 201101 1 004

TATA TERTIB
LABORATORIUM TADRIS MATEMATIK

1. Selama mengikuti praktikum, praktikan wajib mengikuti ketentuan-ketentuan berikut.
2. Praktikan yang terlambat, tidak diperkenankan mengikuti kegiatan praktikum yang sedang berlangsung dengan alasan apapun.
3. Praktikan tidak diperkenankan membawa makanan dan minuman (termasuk permen), senjata tajam, dan senjata api ke dalam ruangan praktikum.
4. Praktikan, dosen dan teknisi wajib menjaga keselamatan diri dan kebersihan ruangan.
5. Praktikan wajib mengisi logbook dan absen ketika masuk ruangan sebelum menggunakan komputer
6. Asisten wajib memantau dan memeriksa proses pengisian logbook oleh praktikan untuk memastikan kegiatan praktikum siap dilaksanakan.
7. Nyalakan komputer sesaat setelah mendapat instruksi dari asisten melalui tombol power dan matikan dengan menggunakan menu shutdown (bukan melalui tombol power).
8. Praktikan harus menyelesaikan praktikum tepat pada waktunya.
9. Praktikan dilarang membawa/mengambil/memindahkan sebagian atau keseluruhan komponen komputer atau perlengkapan praktikum lainnya tanpa memberitahukan terlebih dahulu kepada dosen pembimbing /asisten yang sedang bertugas maupun Pengelola Laboratorium.
10. Kerusakan atau hilangnya peralatan praktikum selama percobaan berlangsung yang disebabkan oleh praktikan menjadi tanggung jawab penuh praktikan tersebut.
11. Sanksi atas pelanggaran ketentuan di atas dapat diterapkan dalam bentuk seringan-ringannya penggantian peralatan yang rusak/hilang, dan/atau seberat-beratnya dicabut status kemahasiswaannya secara permanen.
12. Praktikan wajib mengisi logbook ketika meninggalkan ruangan setelah menggunakan komputer.
13. Asisten wajib memantau dan memeriksa proses pengisian logbook oleh praktikan untuk memastikan kegiatan praktikum telah selesai

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Computer Algebra Sistems (CAS) merupakan suatu model pembelajaran berbasis komputer di perguruan tinggi. Model ini dikembangkan pertama kali oleh Joel Hillel. Model pembelajaran ini memuat tiga aktivitas pokok yaitu surprises, clarifications, dan investigations. Aktivitas CAS bersifat pedagogis artinya proses pembelajaran yang dilaksanakan dapat menimbulkan suatu kondisi psikologis yang membuat mahasiswa senang, tertarik dan tidak frustrasi (Darminto, 2012).

Salah satu aplikasi komputer dalam kegiatan model pembelajaran CAS adalah Maple karena kemampuannya dalam melakukan komputasi numerik, manipulasi aljabar simbolik maupun visualisasi. Selain itu, program ini juga secara khusus menyediakan paket paket terkait dalam pembelajaran teori grup dan gelanggang.

Konsep pertama dari Maple muncul saat pertemuan di University of Waterloo bulan November 1980 untuk mengembangkan sistem aljabar. Versi terbatas pertama muncul pada Desember 1980. Kemudian pada tahun 1988 Waterloo Maple Inc didirikan dengan tujuan awal adalah untuk mengelola distribusi perangkat lunak tersebut laboratorium di universitas-universitas lain di seluruh dunia (Gockenbach, 2010).

Modul ini dibuat dengan memperhatikan model di atas dengan harapan agar mahasiswa menjadi tertarik dan senang dalam mempelajari MK Aljabar abstrak karena paling tidak memuat ketiga aktivitas tersebut.

PERTEMUAN KE-1
(Mengenal Aplikasi Maple)

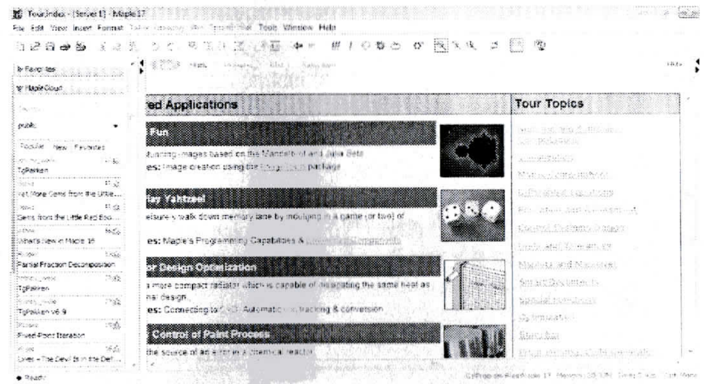
Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa lebih mengenal program Maple
2. Mahasiswa mengetahui menu pada Maple yang berkaitan dengan Aljabar Abstrak serta dapat menggunakannya.

Dasar Teori

Maple merupakan satu Computer Algebra Sistems (CAS) karena memuat tiga unsur yaitu surprise, clarifications, dan investigations. Aktivitas CAS bersifat pedagogis artinya proses pembelajaran yang dilaksanakan dapat menimbulkan suatu kondisi psikologis yang membuat mahasiswa senang, tertarik dan tidak frustrasi (Darminto, 2012). Dengan lebih dari 3.500 routine, Maple mencakup spektrum matematika yang sangat luas, mulai dari pengantar kalkulus hingga ke topik transformasi Fourier, seperti yang ada pada *Maple Tour Topic*, yaitu:

1. Numeric and Symbolic Computations
2. Visualization
3. Matrix Computations
4. Differential Equations
5. Education and Assessment
6. Control Systems Design
7. Units and Tolerances
8. Maplets and MapleNet
9. Smart Documents
10. Special Functions
11. Optimization
12. Statistics
13. Programming, Code Generation, and Open Maple

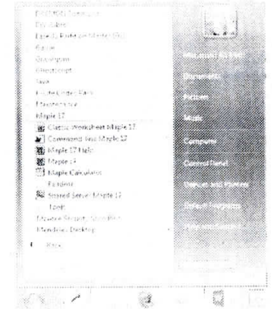


Pertanyaan Pre Praktikum

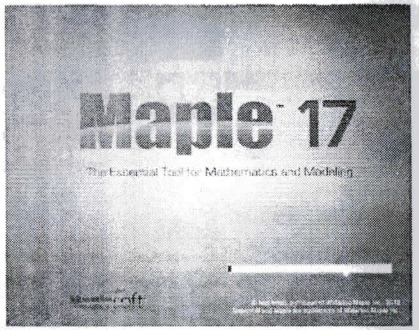
1. Bagaimanakah cara mengoperasikan Maple 17 ?
2. Tool apa saja pada Maple yang akan digunakan dalam pembelajaran Aljabar Abstrak 2?

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Mengoperasikan Aplikasi Maple 17
   a. Klik ikon Maple 17 pada desktop atau pilih melalui alk program >> Maple 17 >> Maple 17

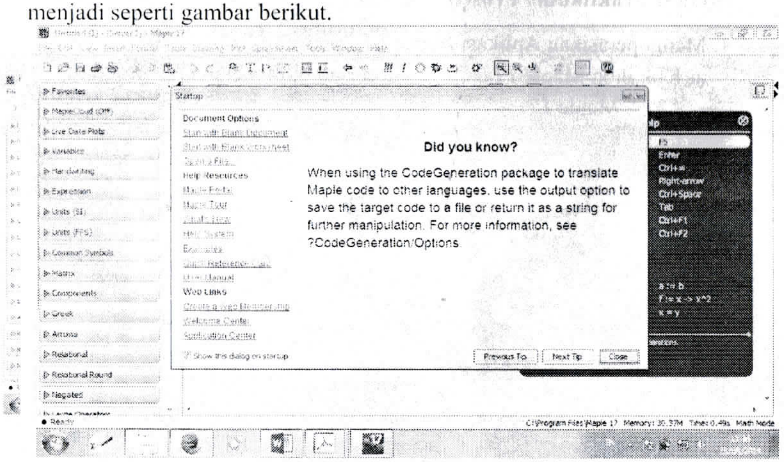


Tunggu sampai aplikasi tersebut terbuka. Selama proses menunggu, Aplikasi Maple yang akan menampilkan gambar berikut.



Munculnya gambar tersebut pertanda Aplikasi Maple 17 sudah terpilih dan sedang dibuka. Proses pembukaan memerlukan waktu yang berbeda-beda sesuai dengan performa komputer yang digunakan. Setelah aplikasi terbuka, akan muncul tampilan seperti berikut.

b. Tutup jendela startup yang terbuka bersama aplikasi Maple sehingga menjadi seperti gambar berikut.



Maple siap digunakan. Yang tampak pada gambar di atas disebut dengan lembar kerja (worksheet) Maple. Pada lembar kerja tersebut terdapat bagian tempat mengetikan baris perintah. Bagian tersebut dinamakan input region. Bagian Input region ditandai oleh [>.

2. Melakukan Kalkulasi Sederhana

   Operasi-operasi biner seperti +, -, * , / dan ^ sudah tersedia pada Maple tanpa harus memanggil paket tertentu. Untuk menghitung (2+3)-5, ketikan pada input region seperti berikut.

   [> (2+ 3)-5;

   Setelah itu tekan enter

3. Menyatakan Himpunan

   Himpunan dan anggotanya dapat dinyatakan menggunakan perintah { }. Sementara itu, himpunan dapat juga dinyatakan dengan menggunakan perintah [ ] jika setiap anggotanya dianggap berbeda dan urutan setiap anggota tersebut dipertahankan seperti adanya.

   Misalkan diberikan himpunan $A = \{a, c, d, b, e, f\}$. Himpunan A ditulis dalam Maple dengan menggunakan perintah sebagai berikut.

$> A := \{a, c, d, b, e, f\};$ tidak berpengaruh

$$A := \{a, b, c, d, e, f\}$$

$> B := [a, c, d, b, e, f];$

Posisi, tidak berpengaruh

$$B := [a, c, d, b, e, f]$$

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Tuliskan dan jalankan perintah berikut,

   [> {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n};

   [> {a, b, d, f, e, c, h, g, k, n, i, m, j, l}; } akan berpindah otomatis sesuai abjad

   [> [a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n];

   [>[a, b, d, f, e, c, h, g, k, n, i, m, j, l];

   Apa yang dapat anda simpulkan setelah menjalankan keempat perintah di atas!

2. Tuliskan dan jalankan perintah berikut,

   [> {a, d, a, b, b, c, d, c, a, d, e, b, c, e};

   [> {d, e, a, e, c, c, a, b, b, d, d, e, d, a};

   [> [a, d, a, b, b, c, d, c, a, d, e, b, c, e];

   [> [a, d, a, b, b, c, d, c, a, d, e, b, c, e];

   Apa yang dapat anda simpulkan setelah menjalankan keempat perintah di atas!

3. Tuliskan dan jalankan perintah berikut,

   [> A := {d, e, a, e, c, c, a, b, b, d, d, e, d, a};

   [> A[1];

   [> A[2];

   [> A[3];

   [> A[4];

   [> A[5];

4. Tuliskan dan jalankan perintah berikut,

   [> A := [d, e, a, e, c, c, a, b, b, d, d, e, d, a];

   [> A[1];

   [> A[2];

   [> A[3];

   [> A[4];

   [> A[5];

5. Apa yang dapat anda simpulkan setelah mengerjakan soal no.3 dan no.4

PERTEMUAN KE-2
(Himpunan)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa lebih mampu menyatakan Himpunan dalam baris perintah Maple
2. Mahasiswa mampu mengoperasikan Himpunan menggunakan perintah yang disediakan oleh Maple.

Dasar Teori

A. Himpunan

Untuk membantu agar bisa memahami dan menggunakan konsep himpunan, perhatikan fakta berikut ini.

1. Suatu himpunan S tersusun atas unsur-unsur. Jika a merupakan salah satu unsur tersebut maka kita tulis: $a \in S$ dan dibaca: a unsur (anggota) dari S.
2. Hanya ada satu himpunan tanpa unsur. Himpunan tersebut dikatakan himpunan hampa (kosong) dan ditulis: $\emptyset$.
3. Kita bisa menyatakan suatu himpunan dengan mendaftarkan anggotanya atau dengan memberikan sifat keanggotaan himpunan tersebut. Dalam mendaftarkan unsur himpunan, setiap unsur dipisahkan dengan koma dan diapit oleh dua tanda kurung kurawal buka dan tutup, contohnya $\{1,2,3\}$. Selanjutnya, misalkan $P(x)$ adalah sifat dari unsur x, maka kita bisa menyatakan himpunan dengan notasi $\{ x \mid P(x)\}$, yaitu dibaca "himpunan semua x yang mempunyai sifat $P(x)$ atau himpunan semua x sehingga pernyataan $P(x)$ tentang x adalah benar". Menyatakan himpunan dengan cara ini, dikenal juga dengan menyatakan himpunan menggunakan sifat keanggotaan himpunan. Contoh menyatakan himpunan dengan cara ini adalah $\{x \mid x$ adalah bilangan asli kurang dari 4 $\}$.
4. Himpunan selalu terdefinisi dengan baik. Artinya jika S suatu himpunan dan a suatu unsur maka berlaku a anggota dari S, ditulis: $a \in S$, atau a bukan anggota dari S, ditulis: $a \notin S$. Contohnya ambil T himpunan

bilangan prima, tentunya setiap kita mengambil sembarang bilangan maka bilangan tersebut masuk ke kelompok prima atau bukan prima dan tidak ada yang tidak masuk ke salah satunya.

Suatu himpunan H dikatakan himpunan bagian (subhimpunan) S, ditulis: $H \subseteq S$ atau $S \supseteq H$, jika setiap anggota H adalah anggota S.

Setiap himpunan merupakan subhimpunan atas dirinya sendiri. Begitu juga himpunan hampa merupakan subhimpunan dari setiap himpunan. Misalkan S suatu himpunan. Subhimpunan dari himpunan S selain himpunan kosong dan himpunan S itu sendiri disebut subhimpunan sejati.

Sumber: (Misri, 2014)

B. Operasi Himpunan

a. Gabungan dan Irisan Dua Himpunan

Gabungan dan Irisan himpunan A dan B didefinisikan sebagai berikut:

$$A \cup B = \{x \in A \text{ atau } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

b. Selisih dan Beda Setangkup Dua Himpunan

Selisih himpunan A dan B didefinisikan sebagai berikut:

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

c. Beda setangkup (Symmetric Differences) himpunan A dan B didefinisikan sebagai berikut:

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

d. Produk Dua Himpunan (Himpunan Koordinat Kartesius)

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, x \in B\}$$

Pertanyaan Pre Praktikum

Berapa banyak bilangan bulat kurang dari 20.000 yang habis dibagi 11 atau 13?

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Menyatakan Himpunan dalam Aplikasi Maple

Seperti pada praktikum pengenalan Maple, himpunan dinyatakan dengan mengetikan perintah: perintah { }. Anggota himpunan dengan menggunakan perintah tersebut selalu terurut dan bersifat tetap.

Misalkan V adalah himpunan huruf vokal, $V = \{a, i, u, e, o\}$. Himpunan V ditulis dalam aplikasi Maple dengan mengetikan baris perintah:

```
[> V:= {a,i,u,e,o};
```

Untuk memeriksa apakah V yang didefinisikan di atas adalah satu himpunan, ketikan perintah berikut.

```
[> type (V,set);
```

Untuk mencari jumlah anggota himpunan V, ketikan perintah:

```
[> nops(V);
[> n := numelems(V);
```

Untuk mencari anggota ke-i pada himpunan V, ketikan perintah:

```
[> V[i];
[> op(i,V);
```

Jika yang dicari lebih dari satu buah anggota, misalnya dari 1 sampai 5, ketikan salah satu perintah berikut.

```
[> for n from 1 by 1 to 5 do V[n] end
[> H := {seq(V[n], n = 1..5)}
[> L := H[1..5]
```

Untuk mengecek apakah unsur $x \in A$, ketikan perintah berikut.

[> $evalb\ (x\ in\ A)$;
[> $member\ (x\ ,\ A)$;

Untuk mengecek apakah unsur $x, y \in A$ sama atau tidak, ketikan perintah berikut.

[> $is(x\ =\ y)$;

Jika benar unsur $x \in A$, maka posisi unsur tersebut , misalnya k, dapat dicari dengan mengetikkan perintah berikut.

[> $member\ (x,\ A, 'k')$; k:=k;

Untuk mengecek apakah himpunan $A \subseteq B$, gunakan perintah berikut.

[> A subset B;

2. Operasi Dua Himpunan

Misalkan diberikan himpunan $A = \{1,2,5,7,8,10,11,24,3,9\}$ dan $B = \{10,11,15,30,2,26\}$.

Untuk mencari gabungan himpun A dan himpunan B, ketikan perintah berikut.

[> A **union** B;
[>' **union**' (A, B): = **union** (A, B);

Untuk mencari irisan himpun A dan himpunan B, ketikan perintah berikut.

[> A **intersect** B;
[>' **intersect**' (A, B): = **intersect** (A, B);

Untuk mencari selisih himpun A dan himpunan B, ketikan perintah berikut.

[> A **minus** B;
[>' **minus**' (A, B): = **minus** (A, B);

Untuk mencari beda setangkup himpunan A dan B, ketikan perintah berikut.
[> $A \oplus B = (A$ **union** $B)$ **minus** $(A$ **intersect** $B)$; atau
[> $A \oplus B = (A$ **minus** $B)$ **union** $(B$ **minus** $A)$; √

Pertanyaan Pasca Praktikum
Latihan
Misalkan diberikan himpunan $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 20\}$, $I = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x < 30\}$, $J = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x < 30\}$ dan $K = \{0\}$.

1. Hitunglah
   a. $(H \oplus I) \setminus (J \oplus K)$
   b. $H \oplus (I \setminus J) \oplus K$
   c. $H \oplus I \setminus J \oplus K$
2. Tentukan himpunan hasil operasi berikut.
   a. $H \cap K \cap I \cap J$
   b. $(H \cap K) \cap (I \cap J)$
   c. $H \cap (K \cap I) \cap J$
3. Tentukan himpunan hasil operasi berikut.
   a. $H \cup K \cup I \cup J$
   b. $(H \cup K) \cup (I \cup J)$
   c. $H \cup (K \cup I) \cup J$
4. Tentukan himpunan hasil operasi berikut.
   a. $H \cap K \cup I \cap J$
   b. $(H \cap K) \cup (I \cap J)$
   c. $H \cap (K \cup I) \cap J$
5. Tentukan himpunan hasil operasi berikut.
   a. $H \cup K \cap I \cup J$
   b. $(H \cup K) \cap (I \cup J)$
   c. $H \cup (K \cap I) \cup J$
6. Tentukan himpunan hasil operasi berikut.
   a. $((H \oplus K) \setminus (H \cup K)) \cap (I \cup J)$
   b. $((H \oplus K) \setminus (H \cup K)) \oplus (I \cup J)$
   c. $(H \oplus K) \cap (I \oplus J)$

A E B C

PERTEMUAN KE-3
(Relasi dan Fungsi)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa mampu menyatakan relasi dan fungsi dalam aplikasi Maple.
2. Mahasiswa mampu memanfaatkan perintah Maple dalam menyelesaikan masalah relasi dan fungsi.

Dasar Teori

1. Relasi

Misal diberikan dua himpunan A dan B. Kemudian, untuk setiap unsur $a \in A$ dan $b \in B$, kita bentuk pasangan unsur a dan unsur b, kita tulis: (a, b). Himpunan semua pasangan (a, b), kita tulis: $A \times B$ dan dibaca: A silang B, yaitu:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

disebut **hasil kali silang** himpunan A dan B,

Himpunan $A \times B$ disebut juga sebagai pruduk kartesius dari himpunan A dan B. Himpunan $A \times B$ dengan A dan B tidak hampa akan kita gunakan untuk mendefinisikan relasi himpunan seperti berikut ini.

Suatu himpunan $\mathcal{R}$ dikatakan relasi dua himpunan tak hampa A dan B jika $\mathcal{R}$ tidak hampa dan $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Jika $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathcal{R}$, kita baca: "a berelasi dengan b" dan ditulis: a$\mathcal{R}$b. Sebaliknya, yaitu jika $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \notin \mathcal{R}$, kita baca: "a tidak berelasi dengan b dan ditulis: $a \not\mathcal{R} b$.

Senada dengan definisi di atas, $(a, b) \in \mathcal{R}$ bisa diartikan sebagai pengaitan atau pemasangan unsur a pada A dengan unsur b pada B, ditulis: $\mathcal{R}: A \longrightarrow B$ dengan $a \mapsto b$.

Pandang A adalah himpunan guru mata pelajaran dan B adalah himpunan mata pelajaran. Misal diberikan relasi $\mathcal{R}$ adalah $a \in A$ mengampu mata pelajaran $b \in B$. Misal diketahui bahwa Zahra adalah anggota himpunan A dan matematika adalah anggota himpunan B, maka (Zahra, matematika) $\in \mathcal{R}$ adalah Zahra mengampu mata pelajaran matematika, kita tulis: Zahra $\mapsto$ Matematika.

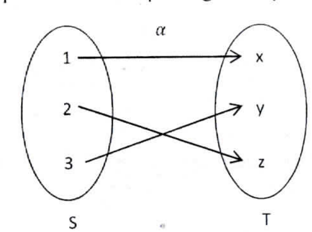
2. Fungsi

Suatu relasi yang memasangkan unsur a di A dengan unsur b di B yang ditetapkan secara khusus yaitu setiap $a \in A$ terpasangkan tepat satu dengan $b \in B$ kita namakan fungsi (pemetaan). Secara formal, pemetaan didefinisikan sebagai berikut.

Pemetaan dari himpunan S pada himpunan T adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap unsur di S tepat satu pada unsur di T. Himpunan S dikatakan sebagai domain dan himpunan T dikatakan sebagai kodomain.

Pemetaan biasanya ditulis menggunakan abjad Yunani kuno atau menggunakan huruf kecil (lower case). Untuk menyatakan α sebagai pemetaan dari S ke T, kita tulis dengan $\alpha: S \longrightarrow T$ atau dengan $S \xrightarrow{\alpha} T$. Jika $x \in S$ maka $\alpha(x)$ adalah unsur di T yang berkaitan dengan x. Unsur $\alpha(x)$ disebut peta dari x oleh pemetaan α. Suatu pemetaan α dikatakan terdefinisi dengan baik jika untuk setiap $x_1, x_2 \in S$ dengan $x_1 = x_2$ mengakibatkan $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.

Misalkan $\mathrm{S} = \{1,2\ 3\}$ dan $\mathrm{T} = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$. Jika kita buat $\alpha(1) = \mathrm{x}$, $\alpha(2) = \mathrm{z}$ dan $\alpha(3) = \mathrm{y}$ maka α merupakan suatu pemetaan yang terdefinisi dengan baik karena setiap unsur di S terpasangkan tepat satu dengan unsur di T.



Gambar: Pemetaan $\boldsymbol{\alpha}$ dari Himpunan $\boldsymbol{S}$ pada Himpunan $\boldsymbol{T}$

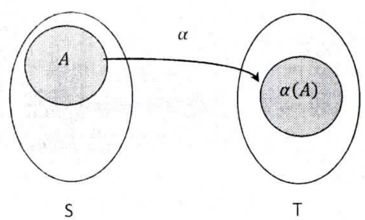
Misal diberikan dua buah pemetaan α dan β dengan $\alpha, \beta: S \longrightarrow T$. Pemetaan α dan β dikatakan sama jika $\alpha(x) = \beta(x)$ untuk setiap $x \in S$. Pada contoh di atas, terlihat bahwa fungsi α dan β berbeda karena terdapat $2 \in S$ dengan $\alpha(2) = z$ dan $\beta(2) = x$ sehingga diperoleh $\alpha(2) \neq \beta(2)$.

Pemetaan himpunan S terhadap dirinya sendiri, yaitu setiap unsur di S terpetakan pada dirinya sendiri (S), dinamakan pemetaan identitas. Pemetaan identitas, ditulis: ι (dibaca: iota), $\iota: S \longrightarrow S$ dengan $\iota(x) = x$ untuk setiap $x \in S$. Untuk menunjukkan bahwa pemetaan ι memetakan S ke S maka kita tambahkan huruf tersebut sebagai indeks sehingga menjadi ι_S.

Jika diberikan $\alpha: S \longrightarrow T$ dan A subhimpunan dari S, maka $\alpha(A)$ menyatakan himpunan unsur-unsur pada T yang merupakan peta dari unsur-unsur himpunan A oleh pemetaan α, yaitu:

$$\alpha(A) = \{\alpha(x) \mid x \in A\}$$

Himpunan $\alpha(A)$ disebut peta A oleh pemetaan α.

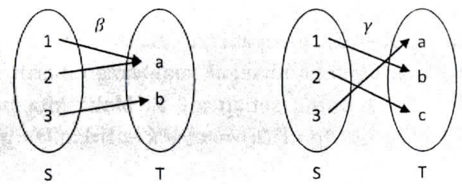


Gambar: Peta subhimpunan A oleh α

Jika diberikan $\alpha: S \longrightarrow T$, maka himpunan $\alpha(S)$ dikatakan peta α. Pemetaan α dikatakan pada (surjektif) jika $\alpha(S) = T$, yaitu untuk setiap $y \in T$ terdapat $x \in S$ demikian sehingga $\alpha(x) = y$.

Perhatikan pemetaan $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $\alpha(x) = x^2$. Pemetaan α tidak bersifat surjektif (pada) karena bilangan real negatif tidak mempunyai prapeta sehingga $\alpha(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$. Akan tetapi, jika kodomain kita batasi menjadi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sehingga $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $\alpha(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka pemetaan α menjadi surjektif karena $\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

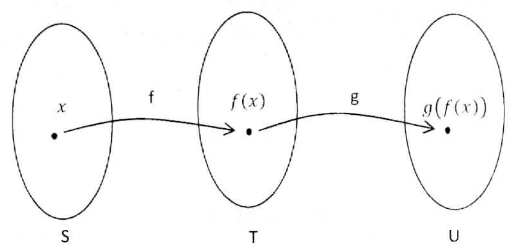
Suatu pemetaan $\alpha: S \longrightarrow T$, dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk setiap $x, y \in S$ dengan $\alpha(x) = \alpha(y)$ mengakibatkan $x = y$.



Pemetaan γ merupakan pemetaan satu-satu, sedangkan pemetaan β bukan pemetaan satu-satu.

Pemetaan satu-satu dan surjektif disebut pemetaan bijektif. Pemetaan γ merupakan pemetaan bijektif karena selain satu-satu, ia juga termasuk surjektif.

Sekarang asumsikan $f: S \longrightarrow T$ dan $g: T \longrightarrow U$. Berikut ini adalah gambar pemetaan dari S ke U, yaitu untuk setiap $x \in S$ dipetakan ke $f(x) \in T$ lalu dipetakan lagi ke $g(f(x)) \in U$.



Gambar: Komposisi Dua Buah Pemetaan ***f*** dan ***g***

Komposisi f dan g dengan $f: S \longrightarrow T$ dan $g: T \longrightarrow U$, ditulis: $g \circ f$, adalah pemetaan dari S ke U yang didefinisikan

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

untuk setiap $x \in S$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Misalkan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, menyatakan suatu pemetaan dari himpunan bilangan real ke himpunan bilangan real, yang diberikan oleh $f(x) = x^2 - x$ dan $g(x) = x - 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Maka kita peroleh pemetaan komposisi f dan g yaitu $(g \circ f)(x) = x^2 - x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 2$.

Pertanyaan Pre Praktikum

Sekolah MTs N Cirebon sedang melakukan pembagian mata kuliah pada guru bidang studi. Berikut ini adalah hasil penetapan untuk kelas III. Mata pelajaran Matematika diampu oleh Musfiroh, mata pelajaran IPA diampu oleh Maman, mata pelajaran bahasa Arab diampu oleh Rodliyah, Tafsir Hadits diampu oleh Suaib.

1. Bagaimanakah relasi antara guru bidang studi dan mata pelajaran yang diampunya? Nyatakan relasi tersebut sesuai definisi.
2. Mana yang dimaksud daerah domain dan hasil dari relasi di atas?
3. Apakah kasus khusus di atas dapat dipandang sebagai pemetaan?

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Menyatakan satu relasi dalam Maple

   Untuk menyatakan pasangan terurut (a, b), ketikan perintah

   $[> \langle a, b \rangle;$

   Untuk menyatakan relasi $\mathcal{R} = \{(a, 1), (e, 3), (u, 4), (o, 5)\}$, ketikan perintah berikut.

   $[> R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle e, 3 \rangle, \langle u, 4 \rangle, \langle o, 5 \rangle\};$

   Untuk mengetahui banyaknya anggota relasi $\mathcal{R}$, ketikan perintah berikut.

   $[> n := nops(\mathcal{R});$
   $[> n := numelems(\mathcal{R});$

   Untuk mencari anggota $x_i \in \mathcal{R}$, ketikan perintah berikut.

   saling keterkaitan

   $[> x[i] := op(i, \mathcal{R});$

   Untuk mengecek apakah anggota $x_i \in \mathcal{R}$, ketikan perintah berikut.

   $[> member(x[i], \mathcal{R});$
   $[> H[i];$

   Untuk mencari pasangan ke-j dari anggota $x_i \in \mathcal{R}$, ketikan perintah berikut.

   $[> H[i][j];$

   Relasi bagian himpunan anggota

   Untuk mencari banyaknya anggota himpunan Domain, ketikan perintah berikut.

   $[> nops\big(\{seq\big(H[i][1], i = 1..nops(H)\big)\}\big);$

   Untuk mencari himpunan Domain, ketikan perintah berikut.

$[> \{seq(H[i][1], i = 1..nops(H))\};$

2. Menyatakan satu pemetaan dalam Maple

Pemetaan dapat dinyatakan menggunakan notasi relasi. Selain itu, untuk mendefinisikan suatu pemetaan $f: A \longrightarrow B$ yang memenuhi $y = f(x)$ dengan $x \in A$ dan $y \in B$ kita gunakan perintah berikut .

$[> f := x \rightarrow f(x);$

Untuk menyatakan pemetaan $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$, ketikan perintah berikut.

$[> f := x \longrightarrow 2x^2 + 4x + 3;$

Untuk memeriksa apakah f yang kita definisikan di atas suatu pemetaan atau bukan, ketikan perintah berikut.

$[> type(f(x), function);$

Untuk $a \leq x \leq b$, pemetaan f dapat ditulis dalam bentuk notasi relasi yaitu sebagai berikut.

$[> f := \{seq(< x, f(x) >, x = a..b)\};$

Untuk melihat daerah hasil R, kita ketikan perintah berikut.

$[> R := \{seq(f[i][2], i = a..b)\};$
$[> R := \{seq(f(x), x = a..b)\};$

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Jika diberikan dua buah pemetaan $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(2x-4)$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukan
   a. Pemetaan $g \circ f$ dan $f \circ g$ untuk $-100 \leq x \leq 100$
   b. Daerah hasil R untuk pemetaan pada soal a.
2. Tentukan invers dari masing-masing pemetaan pada soal no.1
3. Kerjakan soal berikut seperti soal no.1 untuk $0 \leq x \leq 20$ dan $0 \leq x \leq 20$.
   a. pemetaan $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ untuk $x, y \in \mathbb{R}$.
   b. pemetaan $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x) = e^x$ untuk $x, y \in \mathbb{R}$.
   c. pemetaan $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x) = \frac{2x-1}{2x-5}$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

PERTEMUAN KE-4
(Operasi pada Sistem Matematika)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa lebih mampu menyatakan definisi operasi pada sistem matematika dengan Maple menggunakan notasi relasi dan pemetaan
2. Mahasiswa mampu mengoperasikan antar anggota sistem matematika menggunakan perintah Maple.

Dasar Teori

1. Pengertian Operasi

Suatu pengaitan $*$ dikatakan operasi pada himpunan **S** jika $*$ merupakan pemetaan dari himpunan pasangan terurut yang setiap unsurnya berada di S ke himpunan S.

Suatu pemetaan $* : S \times S \to S$ dengan $(a,b) \mapsto a * b$ disebut operasi biner pada himpunan S. Untuk selanjutnya, yang dimaksud dengan operasi dalam buku ini adalah operasi biner. Suatu operasi dikatakan terdefinisi dengan baik jika untuk setiap pasangan terurut (a_1, b_1) dan (a_2, b_2) dengan $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ mengakibatkan $a_1 * b_1 = a_2 * b_2$. Untuk menunjukkan $*$ adalah operasi pada himpunan S, maka pastikan bahwa operasi $*$ terdefinisi dengan baik pada himpunan S.

Pandang suatu himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{Z}^+$. Perkalian merupakan operasi pada himpunan tersebut, yaitu pemetaan $(a,b) \mapsto ab$ dengan ab adalah a dikali b. Sedangkan pembagian bukan operasi pada $\mathbb{Z}^+$karena ada $a,b \in \mathbb{Z}^+$sehingga $/(a,b) = \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}^+$. Artinya, ada dua bilangan positif a dan b sehingga b tidak habis membagi a. Misalnya $(2,3) \mapsto \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}^+$. Penjumlahan, $(a,b) \mapsto a + b$, merupakan operasi di himpunan bilangan bulat

positif $\mathbb{Z}^+$. Sama halnya dengan pembagian, pengurangan juga bukan merupakan operasi di $\mathbb{Z}^+$.

Untuk himpunan S berhingga, khususnya bilamana S memuat sedikit unsur, operasi pada himpunan S dapat disajikan dalam suatu tabel yang dikenal dengan sebutan Tabel Cayley. Penamaan ini merujuk pada nama seorang matematikawan Inggris Arthur Cayley yang hidup dalam masa 1821 – 1895. Pada Tabel Cayley, kita letakkan nilai $a * b$ pada baris ke- a kolom ke- b.

2. Sifat Operasi

Suatu unsur e pada himpunan S dikatakan identitas untuk suatu operasi $*$ pada S jika memenuhi $e * a = a * e = a$ untuk setiap unsur $a \in S$. Unsur identitas setiap operasi senantiasa tunggal. Jika suatu operasi pada sembarang himpunan memiliki unsur identitas kiri e dan identitas kanan f maka $e = f$ dan dengan demikian unsur tersebut adalah unsur identitas suatu operasi.
Misal diberikan operasi $*$ pada himpunan S. Suatu unsur b pada himpunan S dikatakan invers (balikan) dari a pada himpunan S terhadap operasi $*$ jika memenuhi $a * b = b * a = e$.

Misalkan $*$ adalah operasi pada himpunan S dengan unsur identitas e dan unsur $a \in S$ memiliki balikan terhadap operasi $*$. Jika operasi $*$ juga bersifat asosiatif maka balikan dari a tunggal.

Seperti pada identitas, kita dapat mendefinisikan balikan kiri dan kanan. Asumsikan bahwa $*$ adalah operasi pada himpunan S dengan unsur identitasnya e. Balikan kiri dari unsur $x \in S$ adalah $a \in S$ jika memenuhi $ax = e$ dan balikan kanan dari unsur $x \in S$ adalah $c \in S$ jika memenuhi $xc = e$.
Suatu operasi pada himpunan S dikatakan komutatif jika untuk setiap unsur $a, b \in S$ memenuhi $a * b = b * a$.

Misalkan S adalah himpunan tak hampa, $M(S)$ adalah himpunan pemetaan dari S ke S dan $\circ$ menyatakan komposisi. Komposisi $f \circ g$ yaitu $(f \circ g)(x): S \longmapsto S$ adalah didefinisikan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ untuk setiap $x \in S$. Jelas bahwa $\circ$ merupakan suatu operasi, karena pemetaan tersebut terdefinisi dengan baik dan himpunan $M(S)$ tertutup terhadap $\circ$. Berikut ini adalah sifat dari komposisi sebagai suatu operasi.

Sumber: (Misri, 2014).

Pertanyaan Pre Praktikum

Misal diberikan himpunan pasangan terurut $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ dengan operasi jumlah seperti jumlah pada pasangan terurut dan operasi kali skalar yaitu

$$(z_1, q_1)(z_2, q_2) = (z_1 z_2, \quad z_1 q_2 + z_2 q_1)$$

untuk setiap $(z_1, q_1), (z_2, q_2) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$. Apakah operasi jumlah dan kali skalar pada himpunan $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ sudah redefinisi dengan baik sehingga himpunan tersebut tertutup terhadap kedua operasi tadi?

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Operasi dengan notasi relasi dalam Maple
   Dalam notasi relasi, operasi o pada himpunan S dinyatakan

$$o = \{((S[1], S[1]), S[1]oS[1]), \dots, ((S[i], S[j]), S[i]oS[j]), \dots\}$$

   dengan $S[i], S[j] \in S$.

   Tabel Cayley untuk operasi o di atas dapat dinyatakan dalam bentuk array. Untuk itu, ketikan perintah berikut

   $[> n := nops(S);$
   $[> array(1..n, 1..n, [[seq(S[1]\ o\ S[i], i = 1..n)], [seq(S[2]\ o\ S[i], i = 1..n)], \dots [seq(S[n]\ o\ S[i], i = 1..n)],]);$

   Karena $x_i o x_j = (x_i + x_j)\ mod\ 3$ adalah operasi pada $\mathbb{Z}_3$,maka dapat kita buat Tabel Cayley sebagai berikut.

$[> S := \{0,1,2\};$
$[> n := nops(S);$
$[> cay := array\left(1..n, 1..n, \left[[seq((S[1] + S[i])\ mod\ 3, i = 1..n)], [seq((S[2] + S[i])mod\ 3, i = 1..n)], [seq((S[3] + S[i])mod\ 3, i = 1..n)]\right]\right);$

2. Menyatakan satu pemetaan dalam Maple
   Pemetaan dapat dinyatakan menggunakan notasi relasi. Selain itu, untuk mendefinisikan suatu pemetaan $o: S \times S \longrightarrow S$ yang memenuhi $S[i]oS[j] = o((S[i], S[j]))$ dengan $S[i], S[j] \in S$ kita gunakan perintah berikut .

   $[> o := (x, y) \longrightarrow x\ o\ y;$

   Untuk menyatakan operasi $o: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ yang memenuhi $o(x, y) = (x + y)\ mod\ 4$, ketikan perintah berikut.

   $[> S = \{0,1,2,3\};$
   $[> o := (x, y) \longrightarrow (x + y)\ mod\ 4;$
   $[> n := nops(S);$
   $[> cay := array(1..n, 1..n, [seq([seq(o(S[i], S[j]), j = 1..n)], i = 1..n)]);$
   $[> cay := convert(cay, Matrix);$

   Untuk memeriksa apakah $S[i]\ oS[j]$ nilainya sudah sama dengan nilai di tabel, ketikan perintah berikut.
   $[> is(cay[i, j] = o(S[i], S[j]));$

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Jelaskan apakah $*$ merupakan operasi pada bilangan bulat jika untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, diberikan:
   a. $a * b = ab + 1$
   b. $a * b = (a + b)/2$
   c. $a * b = b$

d. $a * b = ab^2$
e. $a * b = a^2 + b^2$
f. $a * b = 2^{ab}$
g. $a * b = 3$
h. $a * b = \sqrt{ab}$

2. Buatlah tabel operasi (Cayley) untuk soal no. 1!
3. Perhatikan tabel operasi yang diperoleh, jika $*$ merupakan operasi, tentukan manakah dari operasi $*$ yang bersifat komutatif dan memiliki identitas!

PERTEMUAN KE-5
(KPK dan FPB)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa mampu menyatakan apakah suatu bilangan terbagi oleh bilangan lain atau tidak.
2. Mahasiswa mampu mencari faktor prima suatu bilangan dan menyatakan bilangan tersebut sebagai perkalian bilangan prima.
3. Mahasiswa mampu mencari KPB dan KPK dari dua buah bilangan

Dasar Teori

Misal diberikan dua buah bilangan bulat r dan s. Suatu bilangan bulat r dikatakan terbagi oleh s, ditulis: $s \mid r$, jika terdapat bilangan bulat q yang memenuhi $r = qs$. Jika r terbagi oleh s, kita katakan bahwa s membagi r atau s faktor dari r atau r kelipatan dari s. Sementara jika r tidak terbagi oleh s cukup kita tulis: $s \nmid r$. Perhatikan bahwa $4 \mid 8$ karena ada bilangan 2 sehingga memenuhi $8 = 4 \cdot 2$, sedangkan $3 \nmid 8$. Suatu bilangan bulat p dikatakan prima jika $p > 1$ dan p tidak terbagi oleh bilangan bulat positif lain selain 1 dan dirinya sendiri. Bilangan 3 adalah prima karena faktornya hanya 1 dan 3.

Misalkan diberikan $a \mid b$ maka ada q sehingga $b = qa$. Karena $-b = -qa = (-q)a$ maka $a \mid (-b)$. Oleh karena itu, jika $a \mid b$ maka $a \mid (-b)$. Sekarang misalkan diberikan $m \mid a$ dan $m \mid b$, maka ada q dan s sehingga $a = qm$ dan $b = sm$. Jadi $m \mid (a + b)$ karena berlaku $a + b = qm + sm = (q + s)m$.

Pertanyaan Pre Praktikum

1. Berapakah KPB dan FPB dari 1024 dan 526?
2. Apakah 2046 habis di bagi 27? Berapakah hasil baginya, jika tidak berapakah hasil bagi dan sisanya.
3. Apakah 1024 dan 526 relatif prima?

$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \overline{)21} \\ 20 \end{array}$

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Menentukan Hasil Bagi dan Sisa
   [> $irem(21,4,'r')$; sisa
   [> $iquo(21,4,'s')$; hasil bagi

2. Mengecek keprimaan dan faktor suatu bilangan
   [> $isprime(2)$;
   [> $type(2, prime)$;
   [> $ifactor(30)$;

3. Mencari KPK dan FPB
   [> $igcd(12,4)$;
   [> $igcdex(12,4,'r','s')$;
   [> $ilcm(12,4)$;

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Apakah faktor dari 10.101.202?
2. Apakah 120 | 10.101.202 jika tidak, berapa sisanya?
3. Tentukan KPK dan FPB dari pasangan bilangan berikut
   a. (30,6) ✓
   b. (67,34)
   c. (123,47)
   d. (250,45)
   e. (1250,347)
   f. (1024,256) ✓
   g. (30567,2016)
   h. (307290,14390) ✓
4. Mana saja pasangan pada no.3 yang merupakan pasangan yang relatif prima?

PERTEMUAN KE-6
(Gelanggang $\mathbb{Z}_n$)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa mengenal struktur bilangan bulat modul n
2. Mahasiswa mampu membuat tabel Cayley untuk struktur bilangan bulat modul n
3. Mahasiswa mampu menentukan apakah $\mathbb{Z}_n$ suatu daerah integral atau bukan

Dasar Teori

pasangan $(x,y) \in A \times A$ dengan $x \neq y$ disebut terurut jika $(x,y) \neq (y,x)$. Untuk selanjutnya, jika $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, pasangan $(x,y) \in \mathcal{R}$ kita tulis: $a \sim b$ dengan $\sim$ kita pandang sebagai suatu relasi pada himpunan A.

Suatu relasi $\sim$ dikatakan relasi ekuivalen pada himpunan S jika untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi tiga sifat berikut.

1. Refleksif: $x \sim x$
2. Simetris: jika diberikan $x \sim y$, maka berlaku $y \sim x$.
3. Transitif: jika diberikan $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka berlaku $x \sim z$.

Jika $\sim$ adalah suatu relasi ekuivalen pada himpunan tak hampa S maka $\sim$ menghasilkan suatu partisi dari S dengan

$$\bar{a} = \{x \in S \mid x \sim a\}$$

adalah sel partisi yang memuat a untuk setiap $a \in S$. Sebaliknya, setiap partisi dari S akan memunculkan suatu relasi ekuivalen $\sim$, yaitu jika $a \sim b$ artinya $a \in \bar{b}$ atau dengan kata lain a dan b berada pada sel partisi yang sama yaitu sel partisi $\bar{b}$.

Setiap sel partisi yang berasal dari partisi yang dihasilkan oleh relasi ekuivalen dinamakan **kelas ekuivalen.** Perhatikan kembali sifat di atas. Sel partisi $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan kelas ekuivalen dari himpunan S.

Untuk suatu himpunan tak hampa S, relasi kesamaan $=$ yang didefinisikan sebagai subhimpunan $\{(x,x) \mid x \in S\}$ dari $S \times S$ merupakan relasi ekuivalen.

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan bilangan bulat yang didefinisikan $x \sim y$ jika dan hanya jika $xy \geq 0$ merupakan relasi ekuivalen.

Misal n bilangan bulat positif. Bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo n, ditulis: $a \equiv b \pmod n$, jika $n \mid (a - b)$.

Misal diberikan dua buah bilangan bulat, yaitu 6 dan 12 maka $12 \equiv 6\ (mod\ 3)$ untuk $n = 3$ karena $3 \mid (12 - 6)$. Sedangkan $12 \not\equiv 6\ (mod\ 5)$ untuk $n = 5$ karena $5 \nmid (12 - 6)$.

Misalkan $a \equiv b\ (mod\ n)$ maka ada $q \in \mathbb{Z}$ sehingga $a - b = qn$ karena $n \mid (a - b)$. Jadi $a = b + qn$. Begitu juga sebaliknya, jika ada $q \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = b + qn$, maka berlaku $a \equiv b\ (mod\ n)$. Dengan demikian, $a \equiv b\ (mod\ n)$ jika dan hanya jika ada $q \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = b + qn$.

Kongruen modulo n adalah suatu relasi ekuivalen pada himpunan bilangan bulat, untuk setiap bilangan bulat positif $n \in \mathbb{Z}^+$.

Karena kongruen modulo n merupakan suatu relasi ekuivalen, maka relasi tersebut menghasilkan suatu partisi yang memuat kelas-kelas ekuivalen. Kelas ekuivalen untuk relasi kongruen modulo n disebut dengan kelas kongruen $mod\ n$.

Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+$, adalah bilangan bulat positif, maka ada sebanyak n kelas kongruen $mod\ n$. Ambil nilai n tetap dan $k \in \mathbb{Z}$, adalah sembarang bilangan bulat. Misalkan $\bar{k}$ menyatakan kelas kongruen $mod\ n$ yang memuat bilangan bulat k, yaitu

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \{l \in \mathbb{Z} \mid l \equiv k\ (mod\ n)\} \\ &= \{l \in \mathbb{Z} \mid l = k + qn, q \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k + qn \mid q \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Misalkan kita tetapkan nilai $n = 12$ maka kita peroleh kelas kongruen:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{\dots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, \dots\} \\ \bar{1} &= \{\dots -35, -23, -11, 1, 13, 25, 37, \dots\} \\ \vdots\ &\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{11} &= \{\dots -25, -13, -1, 11, 23, 35, 47, \dots\} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\bar{0} = \overline{12} = \overline{24} = \cdots$, $\bar{1} = \overline{13} = \overline{25} = \cdots$. Dengan demikian kita peroleh himpunan $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{11}\}$ atau tulis: $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{11}\}$. Himpunan $\mathbb{Z}_{12}$ lebih dikenal dengan istilah himpunan bilangan jam.

Secara umum, $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ disebut dengan himpunan bilangan bulat modulo n.

Ambil sembarang $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\bar{k} = \bar{l}$. Misalkan $a \in \bar{k}$ maka ada $q \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = k + qn$. Karena $\bar{k} = \bar{l}$ maka $a \in \bar{k} = \bar{l}$ sehingga ada $r \in \mathbb{Z}$ dan $a = l + rn$. Dengan demikian $k + qn = a = l + rn$ dan dapat kita tulis menjadi $k = l + rn - qn = l + (r - q)n$. Misalkan $s = r - q \in \mathbb{Z}$ maka $k = l + sn$. Jadi, jika $\bar{k} = \bar{l}$ dengan $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}_n$ maka terdapat $s \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $k = l + sn$. Atau dengan kata lain, dua unsur yang saling kongruen dimasukkan pada kelas kongruen yang sama. Jadi pada $\mathbb{Z}_n$ juga berlaku $\bar{l} = \overline{l + sn}$ untuk $s \in \mathbb{Z}$.

Pertanyaan Pre Praktikum

1. Bagaimana struktur dari sistem bilangan jam?
2. Buat tabel Cayley untuk struktur bilangan jam!
3. Untuk sembarang n, bagai mana struktur $\mathbb{Z}_n$, apakah termasuk daerah integral atau bukan.

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Melakukan operasi jumlah $\oplus$ dan kali $\otimes$ pada $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$
   Untuk melakukan operasi $\bar{a} \oplus \bar{b}$ dengan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, gunakan perintah berikut
   [> $(a + b)\ mod\ n$;
   [> $mod(a + b, n)$;

2. Untuk melakukan operasi $\bar{a} \otimes \bar{b}$ dengan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, gunakan perintah berikut
   bar
   [> $(a * b)\ mod\ n$;
   [> $mod(a * b, n)$;

3. Membuat Tabel Cayley
   [> $S = \{0,1,2, \ldots, n\}$;
   [> $o := (x, y) \longrightarrow (x + y)\ mod\ n$;
   [> $n := nops(S)$;
   [> $cay := array(1..n, 1..n, [seq([seq(o(S[i], S[j]), j = 1..n)], i = 1..n)])$;
   [> $cay := convert(cay, Matrix)$;

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Tunjukan bahwa $\mathbb{Z}_5$ dan $\mathbb{Z}_6$ adalah suatu gelanggang set
2. Tunjukan menggunakan Tabel Cayley bahwa $\mathbb{Z}_5$ adalah daerah Integral sedangkan $\mathbb{Z}_6$ bukan daerah integral.
3. Tentukan Ideal dari $\mathbb{Z}_5$ dan $\mathbb{Z}_6$

PERTEMUAN KE-7
(Operasi pada Suku Banyak)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa mampu menyatakan suku banyak dengan maple
2. Mahasiswa mampu melakukan operasi jumlah dan kali pada suku banyak

Dasar Teori

Misalkan F adalah suatu lapangan dan x menyatakan suatu peubah tak tentu. Bentuk $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$ dinamakan suku banyak (atas lapangan F dengan peubah tak tentu x). Himpunan suku banyak, ditandai dengan $F[x]$, yaitu:

$$F[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \cdots, a_n \in F\}$$

Operasi jumlah $a(x) + b(x)$ dengan $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ dan $b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, yaitu:

$$a(x) + b(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_i + b_i)x^i + \cdots$$

Operasi kali $a(x)b(x)$ dengan $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ dan $b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, yaitu:

$$a(x)b(x) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots$$
$$+ (a_0 b_{m+n} + a_1 b_{m+n-1} + \cdots + a_{m+n} b_0)\, x^{m+n}$$

Pertanyaan Pre Praktikum

1. Bagaimana menuliskan suku banyak $x^2 - 1$ dalam perkalian faktor-faktornya?
2. Apakah suku banyak $x - 1$ membagi suku banyak $x^2 - 1$?

$f(x) = 2x^2 + 4$

$g(x) = 3x^2 - 3x - 2$

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Untuk menyatakan suku banyak, gunakan perintah pemetaan
2. Untuk menyatakan operasi, gunakan perintah operasi seperti pada pertemuan 3.
3. Untuk menyederhanakan dan menjabarkan suku banyak $p(x)$ gunakan perintah berikut.
   [> $simplify(p(x));$
   [> $expand(p(x));$
4. Untuk mengecek derajat suku banyak $p(x)$ gunakan perintah berikut.
   [> $degree(p(x), x);$
5. Untuk mengecek koefisien suku banyak $p(x)$ gunakan perintah berikut.
   [> $coeff(p(x), x, i);$
   [> $coeffs(p(x), x);$
6. Untuk menghitung jumlah suku dari suku banyak $p(x)$ gunakan perintah berikut.
   [> $nops(p(x));$
7. Untuk melihat suku ke-i dari suku banyak $p(x)$ atau secara keseluruhan gunakan perintah berikut.
   [> $op(i, p(x));$
   [> $op(p(x));$
8. Untuk mencari nilai suku banyak $p(x)$ pada $x = a$ gunakan perintah berikut.
   [> $subs(x = a, p(x));$
9. Untuk membagi $p(x)$ oleh $q(x)$ gunakan perintah berikut.
   [> $divide(p(x), q(x), 'r');$
   [> $rem(p(x), q(x), x, 's');$

10. Untuk menyatakan suku banyak $p(x)$ sebagai perkalian faktor-faktor penyusunnya, ketikan perintah berikut.
    [> $factor(p(x));$
    [> $factor(p(x), complex);$
11. Untuk mencari KPK dan FPB dua suku banyak $p(x)$ dan $q(x)$ gunakan perintah berikut.
    [> $lcm(p(x), q(x));$
    [> $gcd(p(x), q(x));$

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Pecahkan permasalahan berikut jika diberikan $p(x) = x^6 + 5x^3 + x^2 + 6$, $q(x) = (2x^5 - 6)^3 + 3$ dan $r(x) = x^2 - 1$
   a. Tentukan orde suku banyak $p(x)q(x) - r(x)$
   b. Sederhanakan suku banyak $p(x)q(x) - r(x)$
   c. Ada berapa banyaknya suku dari $p(x)q(x) - r(x)$? Sebutkan satu persatu serta sebutkan juga koefisien masing-masing suku tersebut!
   d. Berapak nilai $p(x)q(x) - r(x)$ saat $x = 100$.
2. Tentukan KPK dan FPB dari
   a. $p(x)$ dan $q(x)$
   b. $p(x)$ dan $r(x)$
   c. $q(x)$ dan $r(x)$

PERTEMUAN KE-8
(Ideal Suku Banyak)

Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa lebih mampu menyatakan ideal dari gelanggang suku banyak
2. Mahasiswa mampu menentukan apakah suatu ideal prima atau bukan serta maksimal atau bukan.

Dasar Teori

Suatu himpunan tak kosong R terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ dikatakan **gelanggang** jika memenuhi:

1. $(R,+)$ membentuk grup komutatif yaitu memenuhi:

- **a.** Sifat asosiatif yaitu jika memenuhi $a+(b+c)=(a+b)+c$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R.
- **b.** Terdapat unsur 0 di R sehingga $0+a=a+0$ untuk setiap a unsur di R.
- **c.** Terdapat balikan dari a yaitu $-a$ sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$ untuk setiap a unsur di R.
- **d.** Sifat komutatif, yaitu jika memenuhi $a+b=b+a$ untuk setiap a dan b unsur-unsur di R.

2. $(R,\times)$ memenuhi sifat asosiatif, yaitu $a(bc)=(ab)c$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R.

3. $(R,+,\times)$ memenuhi sifat distributif, yaitu $(a+b)c=ac+bc$ dan $a(b+c)=ab+ac$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R.

Jika gelanggang R memuat unsur kesatuan $1\neq 0\in R$ dan bersifat $a1=1a=a$ untuk setiap $a\in R$, maka R disebut **gelanggang dengan unsur satuan.** Dan jika untuk setiap a dan b unsur-unsur di R berlaku $ab=ba$ maka gelanggang R disebut **gelanggang komutatif**. Untuk selanjutnya yang dimaksud dengan gelanggang adalah gelanggang komutatif dengan unsur satuan.

Gelanggang F dikatakan **Lapangan** jika setiap unsur tak nolnya memuat balikan, yaitu untuk setiap $a\in F$ dan $a\neq 0$ terdapat $a^{-1}\in F$ sehingga memenuhi $a^{-1}a=aa^{-1}=1$.

Misalkan R suatu gelanggang. Subhimpunan tak hampa $I\subseteq R$ dikatakan **ideal kiri (kanan)** jika memenuhi:

1. $(I,+)$ membentuk subgrup dari $(R,+)$.
2. untuk setiap $x\in I$ dan $r\in R$ berlaku $rx\in I$ ($xr\in I$).

Ideal sejati P dari gelanggang R dikatakan ideal prima jika $AB\subseteq P$ untuk A dan B ideal dari R berlaku $A\subseteq P$ atau $B\subseteq P$.

Pertanyaan Pre Praktikum

1. Jika diberikan dua buah ideal $\langle p(x),q(x)\rangle$ dan $\langle r(x),s(x)\rangle$ dari suku banyak $F[x]$, bagaimana hasil penjumlahan dan perkalian kedua buah ideal tersebut?
2. Bagaimana cara menyederhanakan hasil pada nomor 1 di atas
3. Apakah ideal tersebut termasuk ideal prima atau bukan?

Metode Praktikum / Prosedur Kerja

1. Menuliskan ideal suku banyak yang dibangun oleh $p(x)$ dan $q(x)$ dengan perintah berikut.

   [> $with(PolynomialIdeals)$:

   [> $J := PolynomialIdeal(p(x),q(x))$;

   Misalnya, untuk menuliskan ideal yang dibangun oleh x^2 dan $2x-1$ gunakan perintah berikut.

   [> $with(PolynomialIdeals)$:

   [> $J := PolynomialIdeal(x^2,2x-1)$;

2. Untuk mengecek suku banyak $r(x) \in J$, gunakan perintah berikut.
   [> $with(PolynomialIdeals)$:
   [> $IdealMembership(r(x), J)$;

   Misalnya, untuk mengecek apakah $8x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \in \langle x^2, 2x - 1 \rangle$, gunakan perintah berikut.
   [> $with(PolynomialIdeals)$:
   [> $J := PolynomialIdeal(x^2, 2x - 1)$;
   [> $r := 8x^3 - 2x^2 + 2x - 1$;
   [> $IdealMembership(r, J)$;

3. Untuk mengecek apakah ideal J prima atau bukan gunakan perintah berikut
   [> $IsPrime(J)$;
   [> $IsMaximal(J)$;

   Misalnya, untuk mengecek apakah $J = \langle x^2, 2x - 1 \rangle$, gunakan perintah berikut.
   [> $with(PolynomialIdeals)$:
   [> $J := PolynomialIdeal(x^2, 2x - 1)$;
   [> $IsPrime(J)$;
   [> $IsMaximal(J)$;

Pertanyaan Pasca Praktikum

Latihan

1. Carilah Ideal suku banyak yang bersifat prima dan maksimal
2. Carilah ideal suku banyak yang bukan prima, maksimal serta yang bukan keduanya.

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

DAFTAR PUSTAKA

Darminto, B. P. (2012). *PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN MATEMATIKA "CAS" DI PERGURUAN TINGGI*. Diambil kembali dari ejournal.umpwr.ac.id: ejournal.umpwr.ac.id/index.php/limit/article/download/194/205

Gockenbach, M. S. (2010). Maple Tutorial. *SIAM.*

Misri, M. A. (2014). *Pengantar Aljabar Abstrak: Teori Grup.* Cirebon: Syariah Nurjati Press.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Muhamad Ali Misri lahir di Kabupaten Tangerang, 30 Oktober1981. Setelah melalui pendidikan pada SDN Sarahan 3 di Kecamatan Sepatan Kabupaten Tangerang, SMPN 1 Sepatan dengan beasiswa dari sekolah tersebut dan SMUN 2 Tangerang juga dengan beasiswa dari sekolah tersebut pendidikan sarjana strata 1 Universitas Jendral Sudirman Purwokerto Tahun 2001 dengan baesiswa BMU lulus Tahun 2005. Magister bidang keahlian Al-jabar Institut Teknologi Bandung dengan beasiswa BPPS lulus Tahun 2010. Pada Tahun 2010 melanjutkan jenjang doktor dengan bidang keahlian Al-jabar di Institut Teknologi Bandung dengan beasiswa BPPS.

Pengalaman pekerjaan tenaga laboratorium matematika di jurusan matematika Unsoed (2005-2008), dosen Kalkulus peubah banyak dan Al-jabar Linier (2010-2011) di ITTelkom Bandung dan dosen Al-jabar Abstrak (2011-sekarang) di IAIN Syekh Nurjati Cirebon.