Kalkulus turunan

by Arif Abdul Haqq

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini, kita akan mengkaji beberapa konsep yang diperlukan dalam mempelajari kalkulus pada bagian-bagian selanjutnya. Bagian ini memuat tentang system bilangan real yang menjadi wilayah atau domain dari permasalahan yang dihadapi dalam kalkulus. Ketrampilan menyelesaikan berbagai bentuk pertidaksamaan diperlukan untuk menentukan nilai limit fungsi.

1.2 Hubungan Interval dan Himpunan, Menyelesaikan Permasalahan, Harga Mutlak

1.3 Persamaan Garis Lurus, Fungsi dan Grafik Fungsi

1.1 Sistem Bilangan Real, urutan, Operasi Hitung, Logika yang dapat Membantu

Pada bagian ini, kita akan mengkaji tentang:

- system bilangan real
- Ketaksamaan dan Harga Mutlak
- Garis Lurus, Fungsi dan Grafiknya

1.1 SISTEM BILANGAN REAL

Tentu kita dengan mudah menyelesaikan $x + 3 = 2$? Lalu, Bagaimana bila x bilangan asli? Jawabnya tentu tidak ada x bilangan asli yang memenuhi persamaan tersebut, karena $x = -2$ adalah bilangan bulat. Sistem bilangan bulat juga tidak mampu menyelesaikan persamaan sederhana $2x + 1 = 2$. Persamaan terakir menuntut sistem bilangan yang lebih luas, yang dikenal dengan bilangan rasional. Bagaimana dengan $x^2 - 2 = 0$, Mampukah bilangan rasional menyelesaikannya?

Bilangan rasional merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a/b, dengan a, b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bentuk lain bilangan rasional juga bisa dinyatakan dalam **desimal berulang.** Perhatikan bilangan-bilangan desimal berikut;

$$0{,}4444\ldots \text{ atau } 0{,}\overline{4}$$

$$0{,}15151515\ldots \text{atau } 0{,}\overline{15}$$

$$0{,}123123123\ldots \text{atau } 0{,}\overline{123}$$

Merupakan bilangan rasional yang masing-masingnya dinyatakan dengan 4/9; 5/33; dan 41/333. Bilangan rasional dapat dicari dengan cara sebagai berikut

Misalkan $a = 0{,}4444\ldots$ (1)

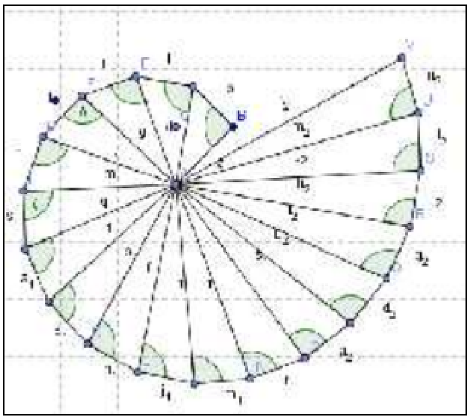
$10a = 4{,}4444\ldots$ (2)

Dengan mengurangi (2) dengan (1) didapat

$9a = 4$ atau $a = 4/9$.

Sementara itu, √2, bila kita cari akan diperoleh bilangan yang desimalnya tidak teratur, sebagai contoh dengan dapat ditentukan bahwa, √2 = 1,4142135623731.

Sehingga √2 kemudian dikenal dengan bilangan **irrasional**. Bilangan eksponen (e) dan phi (π) juga dikenal sebagai bilangan irasional. Contoh bilangan irasional lainnya antara lain √3, √5, √6, dan seterusnya. Bilangan-bilangan tersebut dapat dikonstruksi dengan menggunakan teorema Phytagoras sebagai berikut;

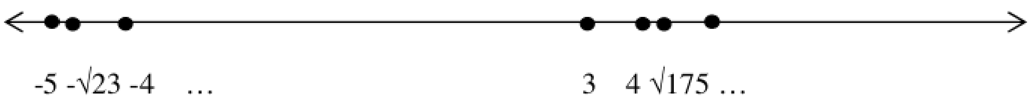


Kalkulus sebagai kajian tentang analisis yang terkait dengan geometri, perubahan dan analisis membutuhkan sistem bilangan yang lebih luas.

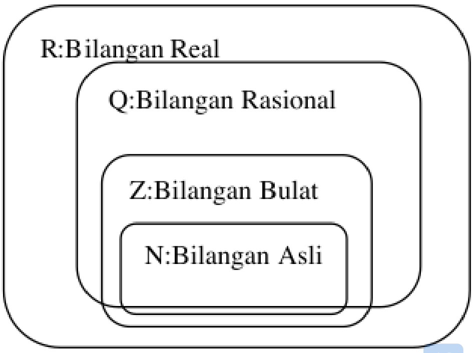
Bilangan-bilangan asli, bulat, dan rasional ternyata tidak mampu untuk menyelesaikan persamaan sederhana seperti $x^2 - 2 = 0$.

Pengertian. Bilangan real adalah bilangan yang dapat digunakan untuk mengukur panjang, berat dan lainnya. Bilangan real juga merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional termasuk bilangan nol. Contoh bilangan real antara lain bilangan rasional, e, π, √5, √2, √3 dan seterusnya.

Bilangan real juga dapat dinyatakan dalam garis bilangan yang rapat seperti berikut



Bilangan real biasa disimbolkan dengan, ”R”. Seperti pada definisi sebelumnya, bilangan real, memuat bilangan rasional, bilangan bulat, bilangan cacah dan bilangan asli.



Sistem bilangan, sebenarnya masih dapat diperluas menjadi sistem **Bilangan Kompleks**. Bilangan ini biasa di nyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{-1}$. Akan tetapi, dalam kajian kalkulus sistem bilangan yang digunakan adalah sistem bilangan real.

Operasi Hitung. Misalkan ada dua bilangan real, x dan y, kita bisa menambahkan atau mengalikan keduanya untuk memperoleh dua bilangan real baru, $x+y$ dan $x.y$(tulis xy). Seperti pada operasi bilangan, dalam hal ini berlaku pula sifat-sifat operasi berikut.

Sifat-sifat Lapangan

1. Komutatif. $x + y = y + x$ dan $xy = yx$
2. Asosiatif. $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)$.
3. Distributif. $x(y + z) = xy + xz$
4. Elemen identitas. Terdapat dua bilangan real berbeda, 0 dan 1, yang memenuhi $x + 0 = x$ dan $x.1 = x$
5. Balikan (invers). Setiap bilangan x mempunyai balikan penjumlahan (lawan), $-x$, yang memenuhi $x + (-x) = 0$. Juga, setiap bilangan real yang bukan 0 mempunyai balikan perkalian (kebalikan), x^{-1}, yang memenuhi $x.x^{-1} = 1$.

Sementara itu, operasi pengurangan dan pembagian didefinisikan dengan menganalogikan pada operasi penjumlahan dan perkalian. Kedua operasi tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$x - y = x + (-y)$ dan $\frac{x}{y} = x \div y = x.y^{-1}$ dimana $y \neq 0$.

Contoh 1.

Urutan. Bilangan real yang bukan 0, memiliki dua himpunan yang terpisah dan berlawanan, yaitu bilangan real positif dan bilangan real negatif. Kenyataan ini membuat kita dapat menggunakan relasi < (baca: kurang dari) yaitu

$$x < y \Leftrightarrow y - x \text{ positif}$$

Tentunya Anda masih ingat dengan lambang ”⇔” dan dibaca dengan? Tepat sekali, lambang tersebut dapat dibaca “jika dan hanya jika” atau juga dibaca “setara dengan”. Berkaitan dengan sifat urutan, Anda dapat mepelajari berikut ini.

Sifat-sifat Urutan

1. **Trikotomi**. Jika x dan y adalah bilangan-bilangan real, maka satu dari tiga urutan ini akan berlaku:

   $$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y$$

2. **Ketransitifan**. $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$
3. **Penambahan.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
4. **Perkalian.** Bilangan z positif, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$, Bilangan z negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Sifat urutan lainnya masih kita betul, yakni ≤ (baca kurang dari atau sama dengan) dan ≥ (lebih dari atau sama dengan). Urutan ≤ didefinisikan dengan

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ positif atau nol}$$

Sedikit Logika yang Membantu. Hasil-hasil penting dalam matematika dinamakan **Teorema**. Kita akan menjumpai dan berhadapan dengan banyak teorema dalam kajian perkuliahan ini. Satu hal penting dan menguntungkan adalah teorema-teorema diberikan label sesuai dengan nama penemunya.

Teorema-teorema banyak sekali dinyatakan dalam bentuk " Jika P maka Q" atau dalam bentuk notasi "$P \Rightarrow Q$" (P berimplikasi Q). P disebut sebagai hipotesis dan Q dinamakan kesimpulan. Pembuktiannya kita mesti menunjukkan Q benar kapanpun P benar.

Hal lain yang menarik dan terkadang membingungkan adalah kalau $P \Rightarrow Q$ bernilai benar, apakah **konvers,** $Q \Rightarrow P$, juga benar? Dua pernyataan tersebut tidaklah ekuivalen. Coba Anda perhatikan dua pernyataan berikut:

1. Jika Nia mahasiswa Prodi Matematika maka Nia mahasiswa Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
2. Jika Nia mahasiswa Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan maka Nia mahasiswa Prodi Matematika

Bagaimana menurut Anda?

Pernyataan pertama tentu bernilai benar, akan tetapi kebalikannya belum tentu benar. Hal ini dikarenakan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan memilik prodi yang lain.

Hal penting lain dalam logika adalah **Negasi.** Negasi dari sebuah pernyataan P ditulis dengan ~P. Sekedar Contoh, Jika P adalah pernyataan " Matematika sulit", maka ~P adalah pernyataan "Matematika tidak sulit". Coba Anda diskusikan, Negasi dari pernyataan " A bilangan Positif" adalah?

Sebuah pernyataan, $\sim Q \Rightarrow \sim P$, dinamakan **Kontrapositif** dari pernyataan $P \Rightarrow Q$. Pernyataan $\sim Q \Rightarrow \sim P$ dan $P \Rightarrow Q$ adalah dua pernyataan yang ekuivalen, keduanya benar ataupun keduanya salah. Lihat contoh kita tentang Nia, kontrapositifnya dari "Jika Nia mahasiswa Prodi Matematika, maka Nia mahasiswa Jurusan Tarbiyah" adalah "Jika Nia bukan mahasiswa Jurusan Tarbiyah, maka Nia bukan mahasiswa Prodi Matematika"

Ke-ekuivalenan antara pernyataan dan kontrapositifnya senantiasa menjadi alasan yang kuat untuk membuktikan sebuah pernyataan melalui kontrapotisif-nya. Inilah yang paling disukai Euclid menurut G.H. Hardy. Pembuktian ini juga dikenal dengan *Reductio ad absurdum*. Jika kita ingin membuktikan P⇒Q, kita asumsikan ~Q dan mencoba mendeduksi ~P. Sebuah contoh sederhana dapat Anda pelajari berikut ini.

Contoh 1

Jika n^2 genap, maka n adalah genap.

Bukti.

Dengan menggunakan pembuktian kontrapositif, maka kita dapat buktikan dengan pernyataan, jika n tidak genap, maka n^2 adalah ganjil. Pernyataan ini ekuivalen dengan, jika n ganjil, maka n^2 ganjil.

Apabila n ganjil, maka terdapat bilangan bulat k sedemikian sehingga $n = 2k + 1$.

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Selanjutnya, n^2 sama dengan bilangan ganjil.

Alternatif bukti:

Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$ untuk k bilangan asli

Sehingga $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ (2k^2 + 2k) + 1$

Sehingga ada K bilangan asli dimana $K = 2k^2 + 2k$

Hal ini menunjukkan bahwa n^2 adalah ganjil.

Hal ini kontradiksi bahwa n^2 adalah genap, sehingga pengandaian kita salah.

Jadi, n mestilah genap.

Terkadang kita juga membutuhkan bentuk lain untuk membuktikan, yakni **Induksi Matematika**. Akan tetapi, kita tidak mengkajinya pada kesempatan saat ini. Hal lain yang terkadang berlaku "Jika P maka Q” dan”Jika Q maka P” keduanya akan benar. Dalam kasus ini, kita menuliskannya menjadi $P \Leftrightarrow Q$ (dibaca P jika dan hanya jika Q). Perhatikan ilustrasi berikut ini,

Jika a.b = 0 maka a = 0 atau b = 0 adalah sebuah pernyataan yang bernilai benar. Begitu pula dengan konversnya, ”Jika a = 0 atau b = 0, maka a.b = 0. Sehingga keduanya, implikasi dan konversnya, dapat digabungkan menjadi sebuah pernyataan,

a.b = 0 jika dan hanya jika a = 0 atau b = 0

Contoh 2

Tunjukkan bahwa $x^2 + y^2 \geq -2xy$

Jawab

untuk x,y anggota bilangan real, maka

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \geq 0$, arau

$x^2 + y^2 \geq - 2xy$

Contoh 3

Selidikilah, apakah jumlah 5 bilangan berurutan merupakan kelipatan dari 5?

Jawab

misalkan 5 bilangan ganjil berurutan adalah, m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, maka

m + (m +1) + (m+2) + (m + 3) + (m + 4) = 5m + 10 = 5 (m+2)

jadi, karena 5 (m+2) merupakan kelipatan 5, maka jumlah 5 bilangan asli berurutan adalah kelipatan 5.

SOAL LATIHAN

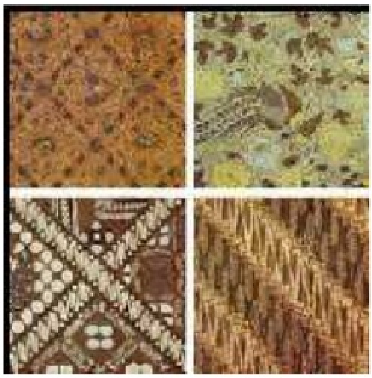
Hitunglah Nilai dari

1. 3 x (-2) + 5
2. $100^2 - 97^2$
3. $x^3 - 2x^2 + 5$ bila $x = 3$
4. $x^3 - 2x + 2$ bila x mendekati 2
5. a dan b apabila $a + b = a/b$
6. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$
7. $(\frac{7}{4}+\frac{1}{2})^{-2}$
8. $2+\frac{3}{1+\frac{5}{2}}$

Sebagai latihan Buktikanlah pernyataan-pernyataan berikut ini

9. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$
10. Jika $0 < a < 1$ maka $a^2 < a$
11. Jika $a^2 < a$ maka $0 < a < 1$
12. Jika n^2 genap maka n genap
13. Jika $a < b$ maka $a < ½ (a+b) < b$
14. Jumlah dua bilangan ganjil adalah genap
15. Jumlah bilangan ganjil dan genap adalah genap

1.2 KETAKSAMAAN, & HARGA MUTLAK



Ketaksamaan merupakan sebuah konsep dalam matematika Permasalahan utama dalam ketaksamaan atau pertidaksamaan adalah menentukan solusi atau penyelesaian dari ketaksamaan tersebut. Solusi yang diperoleh mungkin berhingga banyaknya atau takterhingga banyaknya. Solusi yang didapatkan seringkali dinyatakan dalam notasi himpunan, terlebih lagi dalam kajian kalkulus, atau mungkin dinyatakan dalam bentuk interval , atau dapat pula dinyatakan dalam grafik garis bilangan. Kesemua solusi itu, dalam kalkulus, biasanya merupakan anggota bilangan real.

Kajian pada subbab ini menyangkut tentang: menyelesaikan permasalahan ketaksamaan, memahami pengertian harga mutlak, menyelesaikan persoalan ketaksamaan dan harga mutlak, dan memahami konsep akar kuadrat dan fungsinya

Hubungan Himpunan, Interval dan Garis Bilangan

Tentunya kita telah mengenal berbagai konsep, seperti himpunan, interval (selang), dan garis bilangan. Demikian pula dengan hubungan di antara ketiganya yang merupakan sebuah representasi dari sekumpulan bilangan real. Sekedar mengingat kembali berikut ini akan disajikan beberapa kemungkinannya.

No	Notasi Himpunan	Notasi Selang	garis bilangan
1	$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
2	$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
3	$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
4	$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
5	$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
6	$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
7	$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
8	$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	

Interval atau selang nomor 1 biasa dinamakan dengan **selang terbuka**, sedangkan nomor 2 dinamakan **selang tertutup.** Notasi-notasi tersebut akan sangat membantu dalam menentukan atau menyatakan penyelesaian dari sebuah ketaksamaan.

Menyelesaikan Ketaksamaan

Seperti halnya persamaan, prosedur untuk menyelesaikan ketaksamaan juga memuat langkah-langkah manipulasi sampai himpunan penyelesaian kia dapatkan. Alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya adalah dengan menggunakan berbagai sifat dan teorema yang ada pada kajian sebelumnya (lihat sistem bilangan real).

Langkah-langkah yang sering digunakan adalah:

1. menambah kedua ruas dengan bilangan tertentu
2. mengalihkan kedua ruas dengan bilangan positif
3. mengalihkan kedua ruas dengan bilangan negatif, sambil merubah tanda urutan

Ketaksamaan memiliki bentuk yang beragam. Bentuk linier merupakan bentuk yang paling sederhana. Bentuk ini ditandai dengan variabel yang berderajat 1. Bentuk lain, seperti pecahan rasional, ketaksamaan kuadrat, atau gabungannya memungkinkan kita temui dalam berbagai permasalahan. Berbagai bentuk ketaksamaan dan cara penyelesaiannya dapat dilihat pada contoh berikut ini,

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian dari;

a. $3x + 2 < 10$
b. $4 < 3x + 2 < 10$
c. $3x + 2 < 4x - 10$
d. $3x + 2 < 8 < 4x - 10$

Penyelesian

a. untuk menyelesaikan bentuk ini, kita bisa menambahkan -2 pada kedua ruas sehingga;

   $3x + 2 - 2 < 10 - 2$

   $\Rightarrow 3x < 8$

   $\Rightarrow x < 8/3$

   Jadi, HP = $\{x \mid x < 8/3, x \in R\}$

b. dengan cara yang serupa, kita peroleh,

   $4 - 2 < 3x + 2 - 2 < 10 - 2$

   $\Rightarrow 2 < 3x < 8$

   $\Rightarrow 2/3 < x < 8/3$

   Jadi, HP = $\{x \mid 2/3 < x < 8/3, x \in R\}$

c. Untuk menyelesaikan bentuk ini kita dapat melakukan manipulasi berikut,

   Tambahkan ruas kiri dan kanan dengan -3x sehingga diperoleh

   $3x - 3x + 2 < 4x - 10 - 3x$

   $\Leftrightarrow 2 < x - 10$

   Kemudian tambahkan kedua ruas dengan 10, akan diperoleh

   $2 + 10 < x - 10 + 10$

$\Leftrightarrow 12 < x$

Jadi, HP = $\{x \mid x > 12, x \in R\}$

d. kita bisa memecah menjadi 2 ketidaksamaan yaitu;

$3x + 2 < 8$ dan $8 < 4x - 10$

$\Rightarrow 3x < 6$ dan $18 < 4x$
$\Rightarrow x < 2$ dan $x > 18/4$
hal ini menunjukkan tidak ada x yang memenuhi karena irisan kedua himpunan terakhir adalah himpunan kosong.

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{3x+2}{2x-4} < 0$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan ini kita dapat menggunakan sifat a/b < 0 jika dan hanya jika a.b<0

Dengan demikian

$$\frac{3x+2}{2x-4} < 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(2x - 4) < 0$$

Selanjutnya gunakan **titik uji** (titik pembuat 0), yakni

$$x = -3/2 \text{ dan } x = 2$$

Uji melalui garis bilangan

```
+ + +        - - - -          + + +
_________________________________________
       -3/2                2
```

Atau

$$x < -3/2 \text{ atau } x > 2$$

Jadi,himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -3/2 \text{ atau } x > 2\}$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{3x+2}{2x-4} < 1$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan ini kita dapat menggunakan sifat a/b < 0 dengan mengubah ruas kanannya menjadi nol.

Dengan demikian, tambahkan kedua ruas dengan (-1)

$$\frac{3x+2}{2x-4} < 1 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2x-4} - 1 < 0 \text{ atau } \frac{3x+2}{2x-4} - \frac{2x-4}{2x-4} = \frac{x+6}{2x-4} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 6)(2x - 4) < 0$$

Atau

$$-6 < x < 2$$

J

adi,himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -6 < x < 2\}$

Contoh 4

Tentukan penyelesaian dari $x^2 - x < 0$

Penyelesaian

$$x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad \text{(tambahkan -6)}$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0$$

Kita lihat bahwa -2 dan 3 adalah titik pembuat nol. Selanjutnya kita dapat bagi garis bilangan real menjadi tiga bagian, yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, dan $(3, \infty)$. Selanjutnya kita lakukan titik uji sebagai berikut;

Selang	Titik Uji	Nilai $(x - 3)(x + 2)$	Tanda
$(-\infty, -2)$	-3	6	+
$(-2, 3)$	0	-6	-
$(3, \infty)$	**4**	**6**	+

Jadi solusi yang bersesuaian adalah $(-2, 3)$ atau HP = $\{x: -2 < x < 3\}$

Contoh 5

Tentukan penyelesaian dari $\dfrac{x+3}{x^2+x+2} < 0$

Penyelesaian

Ketaksamaan di atas dapat disusun ulang menjadi

$(x+3)(x^2+x+3) < 0$

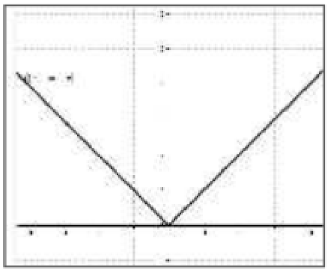
Pemahaman tentang permasalahan akan membantu kita. Perhatikan bentuk kuadrat $x^2 + x + 3$. Bentuk ini memiliki deskriminan D = 1-4.3 = - 11 < 0 dan a > 0, hal ini menunjukkan nilainya akan selalu positif . sehingga $(x+3)(x^2 + x + 3) < 0$ akan dipenuhi bila x + 3 < 0 atau x < -3.

Harga Mutlak

Definisi Harga Mutlak

Secara umum harga mutlak didefinisikan denga $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

Adapun grafik fungsinya dapat dilihat berikut;



Sifat-sifat harga mutlak:

1. |x| ≤ a jika dan hanya jika –a ≤ x ≤ a
2. |x| > a jika dan hanya jika x < -a atau x > a
3. |a.b| = |a|.|b|
4. |a + b| ≤ |a| + |b|
5. |a/b| = |a| / |b|

Dalam harga mutlak juga berlaku teorema berikut

Jika |x| ≤ |y| maka $x^2 \leq y^2$

Teorema di atas sangat membantu kita dalam menentukan himpunan penyelesaian dari ketaksamaan yang memuat harga mutlak. Untuk lebih memahami konsep harga mutlak, marilah kita perhatikan beberapa contoh berikut ini,

Contoh 6

Tentukan nilai x yang memenuhi $|2x + 3| < 5$

Penyelesaian

Berdasarkan sifat harga mutlak kita peroleh bahwa

$$|2x + 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 3 < 5$$
$$\Leftrightarrow -8 < 2x < 2$$
$$\Leftrightarrow -4 < x < 1$$

Jadi, Himpunan Penyelesaiannya adalah $\{x \in R \mid -4 < x < 1\}$

Contoh 7

Tentukan himpunan penyelesaian dari $|3x - 2| < |2x + 3|$

Penyelesaian

Berdasarkan teorema, kita peroleh bahwa

$$|3x - 2| < |2x + 3| \Leftrightarrow (3x-2)^2 < (2x+3)^2$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 < 4x^2 + 12x + 9$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 - 24x - 5 < 0$$
$$\Leftrightarrow (5x + 1)(x - 5) < 0$$
$$\Leftrightarrow -1/5 < x < 5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -1/5 < x < 5\}$

Contoh 8

Tentukan himpunan penyelesaian dari $|2x - 3| < \sqrt{x + 3}$

Penyelesaian

$$x^2 - 6x + 9 < x + 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 6)(x - 1) < 0$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < 6$$

Salah satu konsep yang sangat penting adalah hubungan harga mutlak dengan kuadrat. Hubungan ini dinyatakan dengan,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Demikian juga dengan hubungan

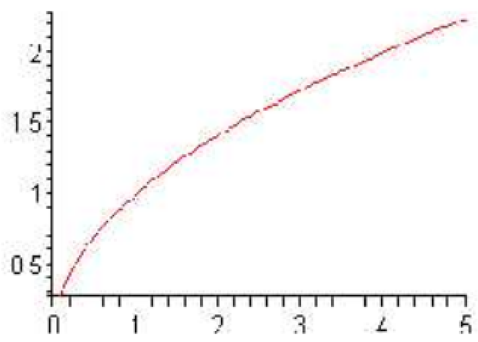
$$\text{Jika } y = x^2 \text{ maka } x = \pm\sqrt{y}$$

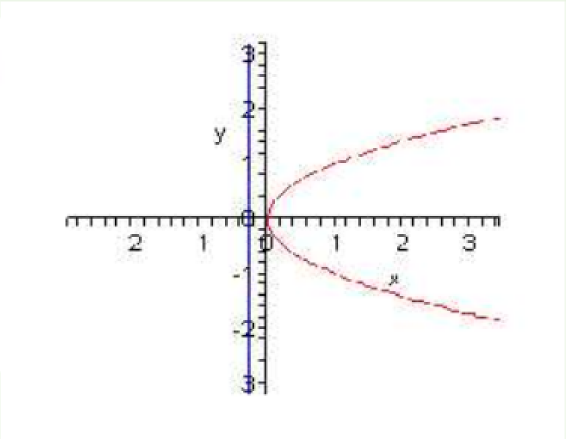
Perhatikan perbedaan kedua fungsi berikut ini,

1. $y = \sqrt{x}$
2. $y^2 = x$

perbedaan kedua fungsi di atas dapat dilihat dari grafik berikut

Grafik $y = \sqrt{x}$ grafik $y^2 = x$





Eksplorasi	
Selidiki dan jelaskan	
a.	$\|ax+b\| < 0$
b.	$\|a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\| \leq \|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\| + ... + \|a_n\|$
c.	Apakah ada a, b dan c sedemikian sehingga $ax^2 + bx + c = \|ax^2 + bx + c\|$ untuk semua x di real
d.	Bandingkan nilai $\|x\|$, $\sqrt{x}$ dan x^2 pada interval [0,1]

SOAL LATIHAN

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari

1. $x - 7 < 2x - 5$
2. $7x - 2 < 9x + 3$
3. $-4 < 3x + 2 < 5$
4. $2 + 3x < 5x + 1 < 16$
5. $2x - 4 < 6 - 7x < 3x + 6$
6. $x^2 + 2x - 12 > 0$
7. $4x^2 - 5x - 6 < 0$
8. $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$
9. $\frac{3x-2}{x-1} \leq 0$
10. $\frac{x+4}{x-3} \leq 2$
11. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$
12. $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$
13. $3x + 7 > 1$ dan $2x + 1 < 3$
14. $2x - 7 \leq 1$ dan $2x + 1 < 3$
15. Tunjukkan bahwa $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
16. Perhatikan rumus berikut,

    $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

    Merupakan total hambatan listrik yang disusun secara parallel. Jika $10 \leq R_1 \leq 20$, $20 \leq R_2 \leq 30$, dan $30 \leq R_3 \leq 40$, tentukan interval dari R.

17. $|x+3| \le 1$

18. $|3x+2| \le 3$

19. $|3x-2| \le 4$

20. $|x-2| < \delta \Rightarrow |4x-8| < \varepsilon$

21. $|x+3| < \delta \Rightarrow |4x+12| < \varepsilon$

22. $|x-1| < 2|x-3|$

23. $|3x-1| < 2|x+6|$

24. $|x| \le 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \le 15$

25. $|x| \le 1 \Rightarrow \left|x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right| \le 2$

26. Tunjukkan bahwa $a \ne 0 \Rightarrow a^2 + 1/a^2 \ge 2$

1.3 GARIS LURUS, FUNGSI, GRAFIK FUNGSI

Fungsi merupakan sebuah bentuk model matematis dari sebuah permasalahan. Fungsi memiliki wilayah dimana aturan didalamnya akan berlaku. Fungsi menjadi mediasi dalam menjelaskan hubungan geometri dengan aljabar

Bagian yang akan dikaji antara lain:

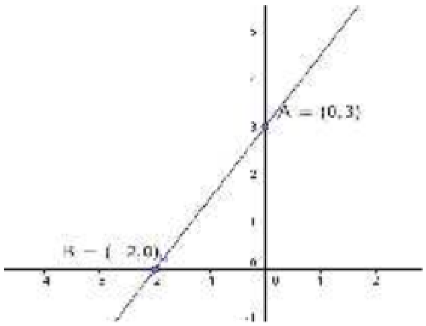
1. menentukan domain dari sebuah fungsi yang berbentuk polinom, akar dan pecahan
2. menentukan range dari sebuah fungsi yang berbentuk polinom, akar dan pecahan menjelaskan
3. menentukan pola grafik dari polinom, akar dan pecahan menjelaskan pola grafik

Persamaan Garis Lurus

Berbagai bentuk kurva, garis lurus merupakan bentukkurva yang paling sederhana. Kita sepakat bahwa dari dua buah titik, hanya bisa dibuat satu garis lurus.

Konsep-konsep yang terkait dengan persamaan garis lurus adalah gradient/slope, *intercept* dan persamaan garisnya. Gradient diartikan sebagai kemiringan dari sebuah garis. Sedangkan intercept adalah titik potong garis dengan sumbu koordinatnya.

Perhatikan gambar berikut ini,



Gradient dari garis dilambangkan dengan m yang diartikan dengan,

$$m = \frac{\text{perubahan arah vertikal}}{\text{perubahan arah horisontal}}$$

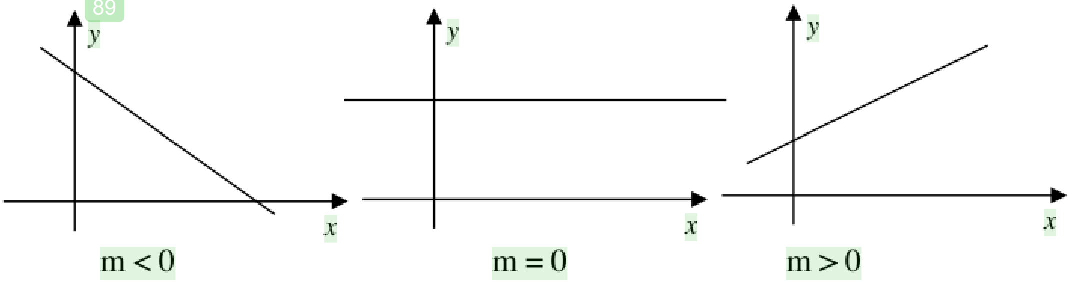
Pada gambar disamping, gradienya adalah m = 3/2. Secara umum, gradient garis dari dua titik A(x_1,y_1) dan B(x_2, y_2) adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

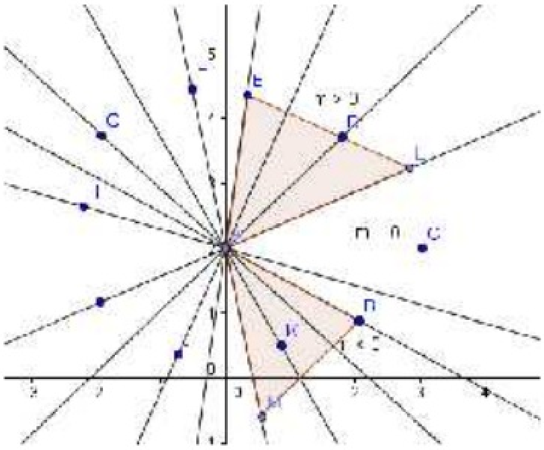
Besar gradient menentukan arah dari persamaan garisnya. Secara garis besar dan berdasarkan sifat trikotomi, gradient m memiliki tiga kemungkinan, yakni;

$$m < 0, m = 0 \text{ atau } m > 0$$

Grafik yang berkaitan dengan nilai gradien diatas dapt dilihat pada gambar berikut;



Untuk melihat bentuk persamaan garis dan gradiennya, mari kita lihat grafik berikut,



apabila m positif maka garis monoton naik (dari kiri ke kanan atas). Apabilai m negative maka grafik monoton turun(dari kiri ke kanan bawah). Besar gradient akan sama besar, bagaimanapun cara kita menghitungnya. Misalkan sebuah garis melalui titik (1,2) dan (2, 4). Maka gradiennya akan sama dengan,

$$m = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Atau

$$m = \frac{2-4}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Persamaan garis lurus dapat ditentukan apabila;a) diketahui satu titik dan gradiennya, gradien dengan titik interceptnya, dan dari 2 titik yang diketahui.

Titik dan Gradien

Persamaan garis dapat ditentukan apabila diketahui sebuah gradient m dan satu titik (x_1, y_1) yang dilaluinya, maka

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Misalkan diketahui gradient $m = 2$ dan melalui (1, 4), maka persamaan garisnya adalah,

$$y - 4 = 2(x - 2)$$
$$y = 2x + 2$$

Contoh 1

Tentukan persamaan garis yang melalui (-4,2) dan (6,-1).

Penyelesaian

Gradient garisnya,

$$m = \frac{-1-2}{6-(-4)} = \frac{-3}{10}$$

Gunakan titik (-4,2) sebagai titik tetap. Jadi,

$$y-2 = -\frac{3}{10}(x+4)$$

$$y = -\tfrac{3}{10}x - \tfrac{12}{10} + 2 = -\tfrac{3}{10}x + \tfrac{8}{10}$$

Gradien dan Intercept

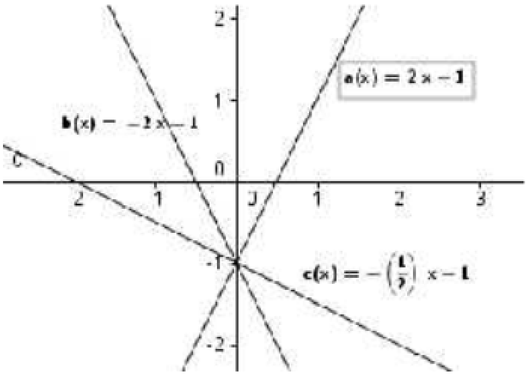
Sebuah persamaan garis juga dapat ditentukan apabila diketahui besar gradient m, dan (intercept) titik potong dengan sumbu-y di titik (0,b). bentuk umum dari persamaan ini adalah,

$$y = mx + b$$

Contoh 2

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0, -1) dengan gradien berikut;

a. $m = 2$
b. $m = -2$
c. $m = -½$

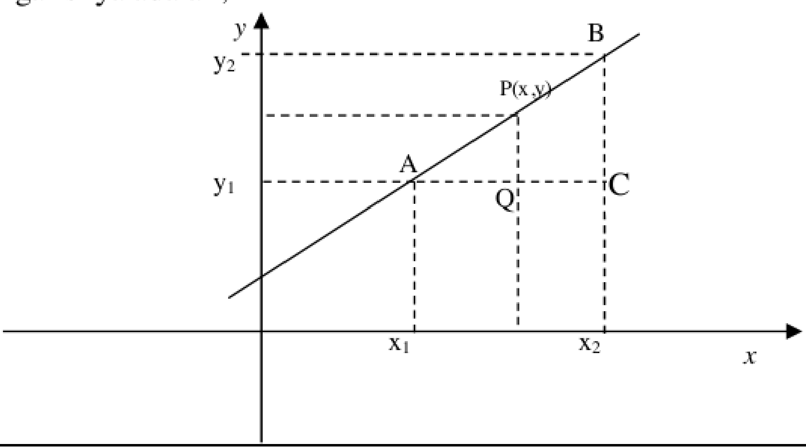


Penyelesaian

a. $y = 2x - 1$
b. $y = -2x - 1$
c. $y = -½x - 1$

Titik dan Titik

Pada bagian awal kita sudah singgung tentang uniknya persamaan garis yang dapat dibuat dari dua titik. Misalkan (x_1,y_1) dan (x_2,y_2) adalah dua titik yang dilalui oleh sebuah garis, maka persamaan garisnya adalah,



Perhatikan segitiga ABC dan APQ, keduanya merupakan segitiga yang sebangun. Ingat kembali sifat yang berlaku untuk dua segitiga sebangun

$$\frac{PQ}{AQ}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\frac{y-y_1}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ atau}$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Atau

$$y-y_1=\frac{y-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$$

Contoh 3

Persamaan garis yang melalui dua titik berikut adalah

a. (-1,3), (2,5) b. (2,5), (-1,3)

Penyelesaian

Kita bisa mencari persamaan garis dengan cara mencari gradient terlebih dahulu atau langsung mensubstitusikan kedua titiknya pada rumusan terakhir.

a. Pertama kita mencari gradient terlebih dahulu, sehinggan kita dapatkan,

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$$

Selanjutnya, substitusikan kedalam persamaan

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y - 3 = {}^{2}/_{3}(x - (-1)) = {}^{2}/_{3}(x + 1)$$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3} + 3$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

Atau

$$3y = 2x + 11$$

b. Dengan mensubstitusikan langsung kedalam rumusnya, sehingga

$$y - 5 = \frac{3-5}{-1-2}(x-(-1)) = \frac{-2}{-3}(x-2)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 5$$

$$\mathrm{y} = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

Atau,

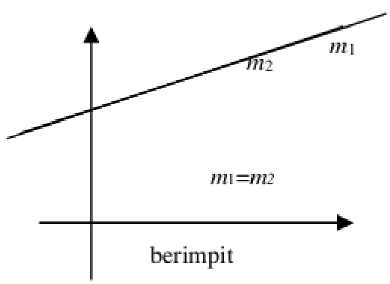
$$3y = 2x + 11$$

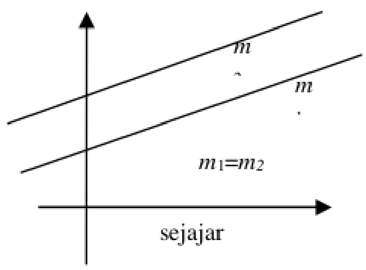
Pada contoh diatas kita bisa melihat bahwa persamaan garis yang diperoleh adalah sama. Hal ini menunjukkan bahwa pada dasarnya kita bisa menentukan titik mana saja yang dianggap titik pertama.

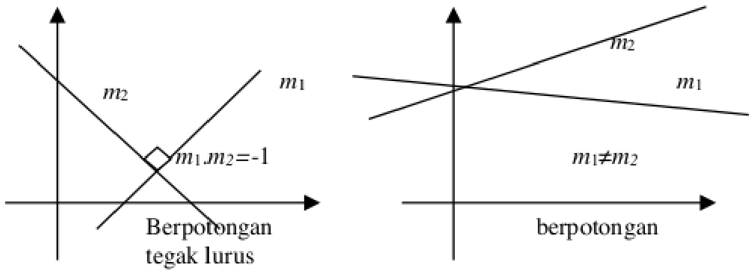
Kedudukan Dua buah Garis

Sifat trikotomy bisa menjelaskan dengan baik tentang hubungan dari dua konsep dalam matematika. Sama halnya dengan dua buah bilangan a dan b. Hubungan yang mungkin terjadi adalah $a < b$, atau $a = b$, atau $a > b$. Sedangkan pada dua buah garis, misal g dan h hubungan yang ada adalah g sejajar h, g berimpit h, atau g berpotongan dengan h. Lalu bagaimana ciri dua buah garis sejajar? Berpotongan (khususnya, tegak lurus)? Dan Berimpit?.

Perhatikan gambar berikut ini







Dari gambar di atas kita bisa lihat bahwa,

Dua garis dikatakan **berimpit** apabila memiliki gradient sama besar dan intercept yang sama.

Dua gari dikatakan **sejajar** apabila memiliki gradient sama dan intercept berbeda.

Dua garis dikatakan **berpotongan tegak lurus (saling tegak lurus)** apabila $m_1.m_2 = -1$.

Dua garis **berpotongan** apabila gradiennya berbeda.

Contoh 4

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (1,2) apabila

a. Sejajar dengan $y = 3x + 2$

b. Tegak lurus $y = 2x - 1$

Penyelesaian

a. Karena sejajar maka $m = 3$, jadi persamaannya adalah

$$y - 2 = 3(x - 1) = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$$

b. Karena tegak lurus dg $y = 2x$ -1, maka $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$

Jadi, persamaannya $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ atau $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

Garis, memiliki **bentuk umum,**

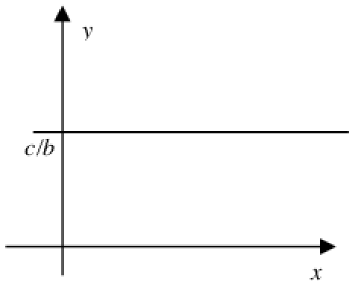
$$ax+by=c$$

dengan a dan b tidak keduanya nol. Apabila kita lakukan penyusunan ulang terhadap bentuk umumnya, kita bisa mendapatkan,

$$by=-ax+c$$
$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{c}{a}\right)$$

Hal ini menunjukkan bahwa gradiennya sama dengan

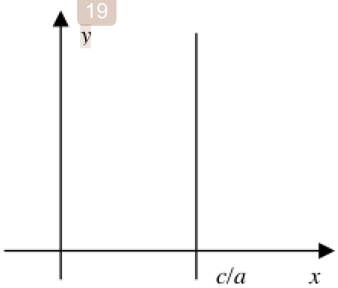
$$m=-\frac{a}{b}$$



Apa yang terjadi apabila $\boldsymbol{a}$ **= 0**? Kita lihat atau substitusikan dalam bentuk umumnya, sedemikian sehingga,

$$ax+by=c \Rightarrow 0x+by=c$$
$$\Rightarrow by=c$$
$$\Rightarrow y=\frac{c}{b}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\boldsymbol{y}$ **= konstanta** sehingga grafiknya berupa **garis horizontal.(lihat gambar disamping)**



Bagaimana kalau $\boldsymbol{b}$ **= 0**? Dengan cara yang serupa kita peroleh,

$$ax+by=c \Rightarrow ax+0y=c$$
$$\Rightarrow ax=c$$
$$\Rightarrow x=\frac{c}{a}$$

Oleh karena itu, **x = konstanta** maka garis berbentuk **garis vertikal**

Kajian lanjutan yang terkait dengan persamaan garis lurus adalah tentang pendekatan turunan melalui gradient, regresi linier dalam statistic, pendekatan pola generalisasi, system persamaan dan pertidaksamaan linier.

Aplikasi persamaan linier

Persamaan linier dapat digunakan atau diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari. Perhitungan tabungan atau pinjaman dengan bunga tunggal merupakan permasalahan yang dapat diselesaikan melalui persamaan linier. Perhatikan contoh berikut;

Aziz menyimpan uang sebesar Rp.5.000.000,- di Bank A dengan bunga pertahun sebesar 6%. Tentukanlah

a) Jumlah tabungan Aziz pada akhir tahun pertama
b) Jumlah tabungan Aziz pada akhir tahun ke-15
c) Jumlah tabungan Aziz pada akhir tahun ke-n

Jawab:

Misalkan jumlah tabungan awal = J_0 = 5.000.000

Suku bunga = 6% = 0,06 /tahun

Jumlah Tabungan akhir tahun pertama = tabungan Awal + bunga

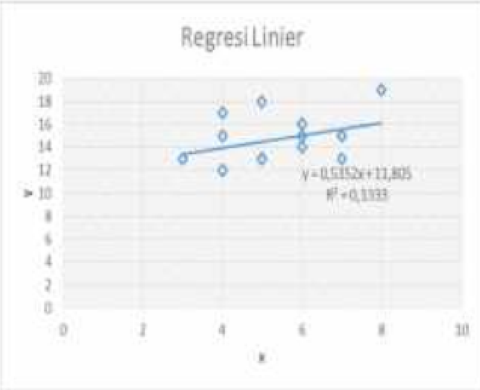
J_0 = 5.000.000, bunga = 0,06 x 5.000.000 = 300.000

a) Jadi, jumlah tabungan pada akhir tahun pertama = 5.000.000 + 300.000 = 5.300.000
b) Jumlah tabungan pada akhir tahun ke-15

   J_{15} = 5.000.000 + 15 x 0,06 x 5.000.000 = 9.500.000
c) Jumlah tabungan pada akhir tahun ke-n

   J_n = 5.000.000 + n.0,06 x 5.000.000 = 5.000.000 + 300.000n

Regresi Linier



Persamaan linier juga merupakan konsep yang mendasari regresi linier dalam statistik. regresi linier adalah persamaan linier yang dibangun dari sekumpulan nilai dari dua variabel yang berbeda. regresi linier biasa digunakan untuk melihat pengaruh dari satu variabel ke varianel lainnya.

Regresi dalam statistik dikenal dengan regresi linier sederhana dan linier berganda. Regresi linier sederhana biasanya dinyatakan dengan, $y = a + bx$. Sedangkan linier berganda biasa dinyatakan dengan, $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... + b_nx_n$.

Model Persamaan Regresi Linear Sederhana adalah seperti berikut ini :

Y = a + bX

Dimana :
Y = Variabel Response atau Variabel Akibat (Dependent)
X = Variabel Predictor atau Variabel Faktor Penyebab (Independent)
a = konstanta
b = koefisien regresi (kemiringan); besaran Response yang ditimbulkan oleh Predictor.

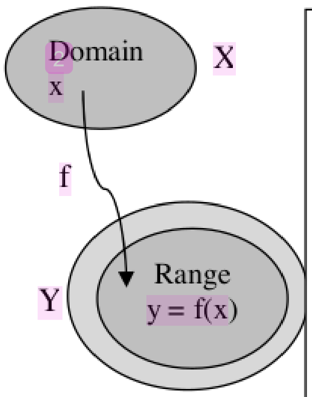
Nilai-nilai a dan b dapat dihitung dengan menggunakan Rumus dibawah ini :

$$a = \frac{(\Sigma y)\ (\Sigma x^2) - (\Sigma x)\ (\Sigma xy)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$b = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)\ (\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

Fungsi

Fungsi diartikan sebagai sebuah relasi khusus yang memetakan satu elemen dari sebuah himpunan (Domain) dengan tepat satu anggota dari himpunan lainnya(Range). Domain merupakan sebuah himpunan dimana fungsi memiliki nilai, sedangkan range adalah himpunan yang anggotanya adalah nilai-nilai dari fungsi menurut daerah asalnya. Fungsi biasa dinotasikan, dalam matematika dengan $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$,.., atau $(x, f(x))$, atau f: $x \to y$ dengan $x \in$Domain dan $y \in$Range.



Definisi dari fungsi real dari variable real
Misalkan X dan Y adalah himpunan bilangan real. Fungsi bernilai real dari variable real dari X ke Y adalah setiap x di X berkorespodensi tepat satu bilangan y di Y.
Domain dari f adalah X. bilangan y bayangan dari x dari f dinotasikan dengan $f(x)$, dinamakan nilai dari f di x. Range dari f adalah subhimpunan dari Y dan memuat semua bayangan dari bilangan X.

Untuk lebih memahami konsep daerah asal(Domain, tulis D) dan daerah hasil(Range, tulis R) marilah kita lihat contoh berikut ini,

Contoh 5

Tentukan domain dan range dari fungsi berikut ini:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

b. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{3x + 2}$

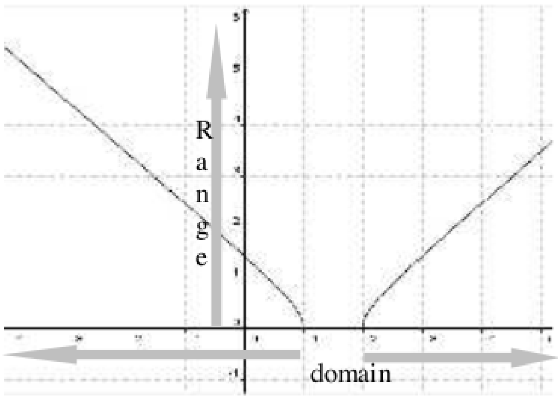
c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{3x + 2}$

Penyelesaian

a. Untuk menyelesaikan ini kita mesti mengetahui syarat dari sebuah bentuk akar dalam sistem bilangan real, **yaitu ≥0**. Dengan demikian, syaratnya adalah

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{atau } x \geq 2$$

Jadi, $D_f = \{x \in R|\ x \leq 1 \text{ atau } x \geq 2\}$
Sedangkan $R_f = \{x \in R|\ x \geq 0\}$hal ini dikarenakan f(x) merupakan fungsi akar.

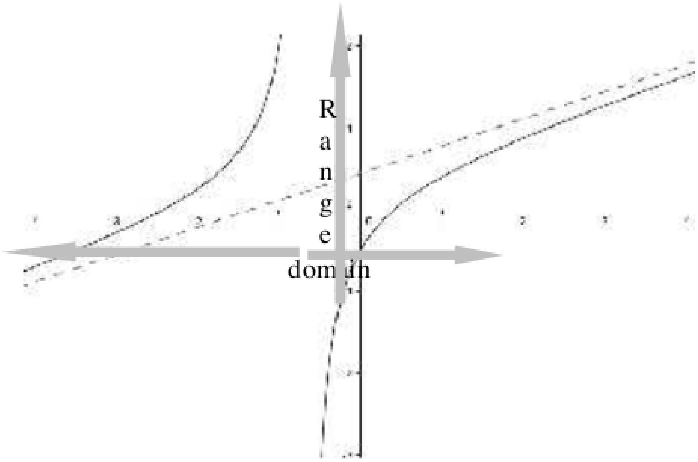


b. Untuk menyelesaikan ini kita mesti mengetahui syarat dari sebuah bentuk pecahan ,**yaitu penyebutnya ≠ 0** . Dengan demikian, syaratnya adalah

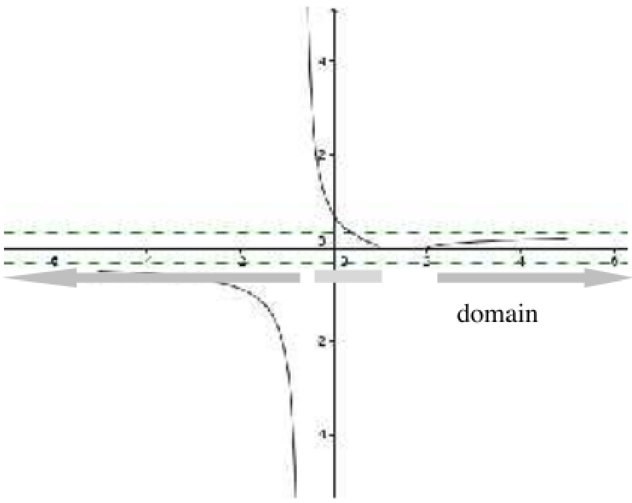
$$3x + 2 \neq 0 \text{ atau } x \neq -2/3$$

Jadi, $D_g = \{x \in R|\ x \neq -2/3\}$

Karena semua nilai di real dapat ditentukan oleh g(x), maka $R_g = \{x \in R\}$



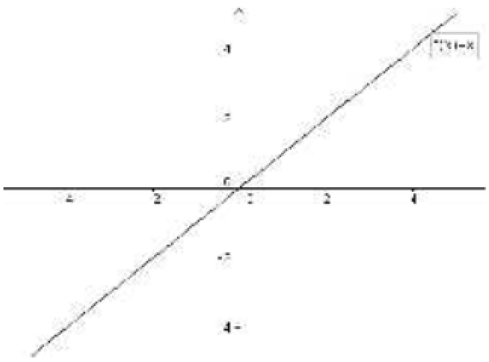
c. Untuk menyelesaikan ketaksamaan ini, kita perlu mengetahui syarat akar dan fungsi rasional. Untuk itu, kita bisa melihat pada bagian (a) dan (b) sehingga
$D_h = D_f \cap D_g = \{x \in R | \ x \leq 1$ atau $x \geq 2\} \cap \{x \in R | \ x \neq -2/3\} = \{x \in R | \ x \leq 1$ atau $x \geq 2$, dan $x \neq -2/3\}$



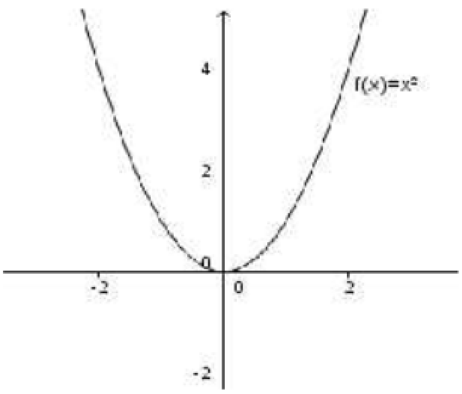
GRAFIK FUNGSI

Fungsi selain bisa dianalisa secara simbolik atau aljabar, bisa juga dilihat dari grafiknya. Untuk melihat perilaku dan kecenderungan fungsi, kita bisa melihatnya melalui grafik fungsi. Grafik fungsi merupakan visualisasi dari fungsi yang dinyatakan secara aljabar. Untuk menggambar grafik fungsi kita bisa nelakukannya dengan berbagai cara seperti dengan menggunakan titik-titik uji (seperti waktu SMA dulu), dengan berbagai software computer seperti excell, mathlab, maple, curve expert 2.1 dan lainnya.

Berikut diberikan beberapa contoh menggambar grafik dengan computer

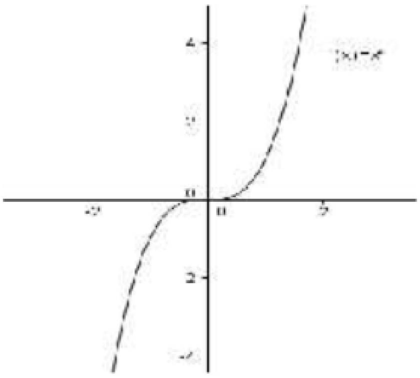


Gambar disamping merupakan grafik dari fungsi f(x) = x. Fungsi tersebut dikenal dengan nama **fungsi linier.** Hal yang identik dengan persamaan garis dengan bentuk umum, $y = mx + n$ dimana m dikenal dengan nama **gradien (kemiringan garis)** dan n dikenal dengan nama **intercept (titik potong garis dengan sumbu y).** Apabila $m > 0$, maka kurva dikatakan **naik**. Apabila $m < 0$, maka kurva dikatakan **turun.** Selanjutnya apabila $m = 0$, maka kurva atau grafik berupa **konstanta** atau garis horizontal.

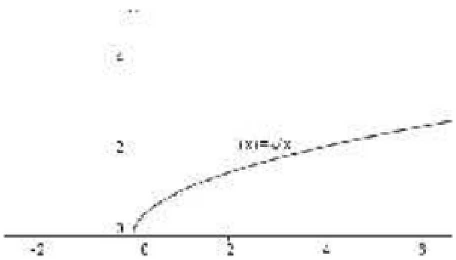


Grafik ini adalah sebuah grafik dari $f(x) = x^2$, dikenal dengan nama **persamaan kuadrat.** Sedangkan grafiknya biasa disebut sebagai **parabola**. Akan tetapi, grafik disamping merupakan grafik dasar dari persamaan kuadrat.

Perkembangan berikutnya persamaan kuadrat memiliki bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$. **Pola grafik** akan ditentukan oleh **tanda** (- atau +) dan **besar** nilai dari masing-masing a, b, dan c. Beberapa konsep penting yang terkait dengan persamaan kuadrat antara lain, **deskriminan, sumbu simetri, akar-akar, nilai minimum dan nilai maksimum.**

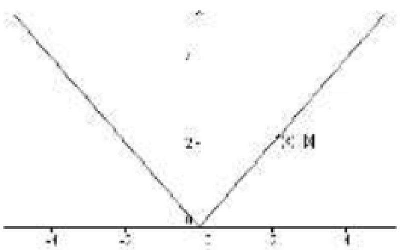


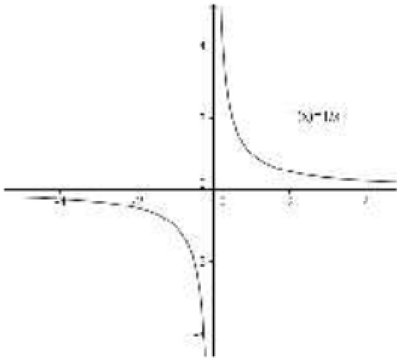
Grafik fungsi berikutnya adalah **fungsi kubik** dengan kurva dasar seperti gambar disamping, dimana $f(x) = x^3$. Fungsi ini memiliki sumbu simetri berupa garis $y = -x$. Pada kajian selanjutnya fungsi ini dikenal sebagai fungsi ganjil.



Grafik berikut merupakan grafik **fungsi akar**, dimana $f(x) = \sqrt{x}$. Fungsi ini bernilai apabila $x \geq 0$, dengan x di Real. Fungsi ini memiliki nilai minimum di 0.

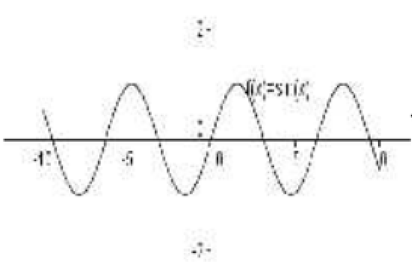
Selain fungsi akar, terdapat juga fungsi yang senantiasa bernilai taknegatif. Fungsi ini dikenal dengan nama **fungsi nilai mutlak,** dimana $f(x) = |x|$. Fungsi ini memiliki domain untuk semua bilangan real, dengan nilai minimum di 0.

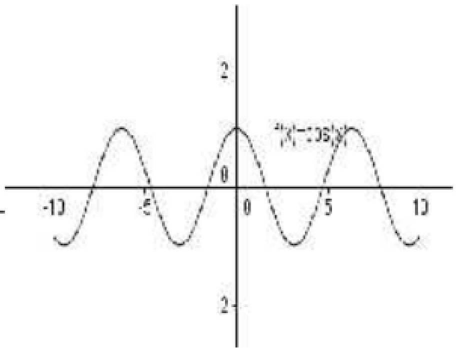




Fungsi dasar lain yang tidak kalah penting adalah **fungsi rasional**, dimana $f(x) = 1/x$. Fungsi ini memiliki domain $x \neq 0$ dengan x di real. Selain itu, fungsi juga memiliki asympot pada $x = 0$ dan $y = 0$.

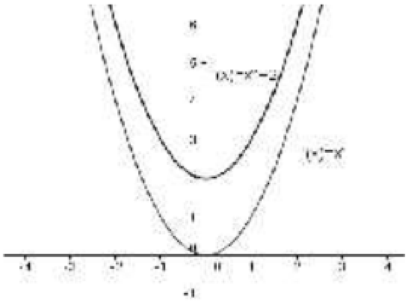
Fungsi-fungsi di atas merupakan beberapa bagian yang termasuk dalam kategori fungsi polinom. Fungsi yang juga banyak dikaji dalam kalkulus adalah fungsi trigonometri, yakni fungsi **Sinus** dan **Cosinus**. Fungsi ini memiliki periodisasi (nilai yang berulang) pada p $= 2\pi$ sehingga $\sin(x + p) = \sin(x)$ atau $\cos(x + p) = \cos(x)$

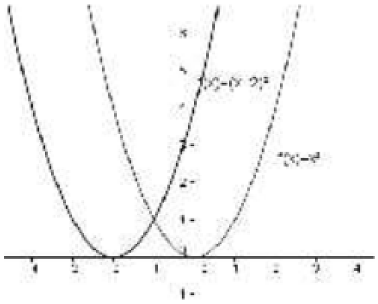


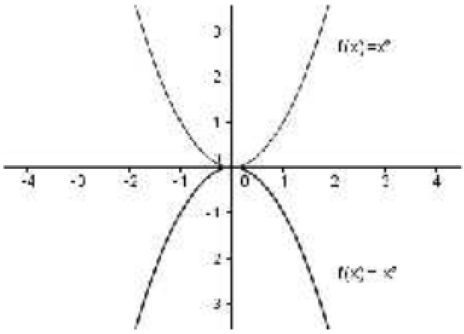


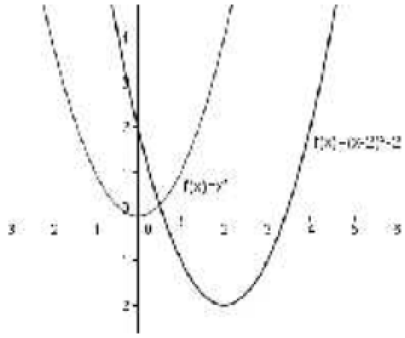
TRANSFORMASI DARI FUNGSI

Beberapa fungsi di atas merupakan bentuk dari fungsi dasar. Cobalah kita bandingkan grafik dari $y = x^2$ dengan grafik lainnya sebagai berikut;









Grafik yang bergaris tebal di atas merupakan hasil **transformasi** dari grafik dasar fungsi $y = x^2$. Transformasi yang dilakukan dengan menggeser ke atas, kebawah, kesamping kiri dan kanan.

Secara umum transformasi grafik dapat dilihat berikut, dengan c > 0	
Bentuk	**Arti**
$f(x)$	**Fungsi asal**
$f(x)$ + c	Menggeser kurva ke atas sejauh c
$f(x)$ – c	Menggeser kurva ke bawah sejauh c
$f(x+c)$	Menggeser kurva kekiri sejauh c
$f(x - c)$	Menggeser kurva kekanan sejauh c
$f(x + c)$ + d	Menggeser kurva kekiri sejauh c dan ke atas sejauh d
$-f(x)$	Refleksi terhadap garis sumbu-x
$f(-x)$	Refleksi terhadap garis sumbu-y
$-f(-x)$	Refleksi terhadap titik asal

Contoh 6

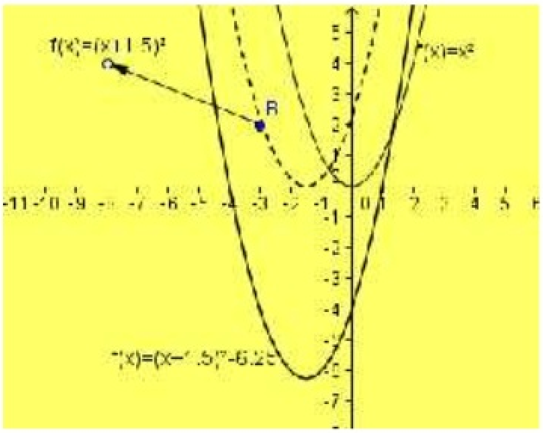
Buatlah sketsa grafik dari $f(x) = x^2 + 3x - 4$ dengan mentransformasi grafik $f(x) = x^2$

Penyelesaian

Pertama kita rubah fungsi ke dalam bentuk transformasi yang ada, sehingga kita peroleh

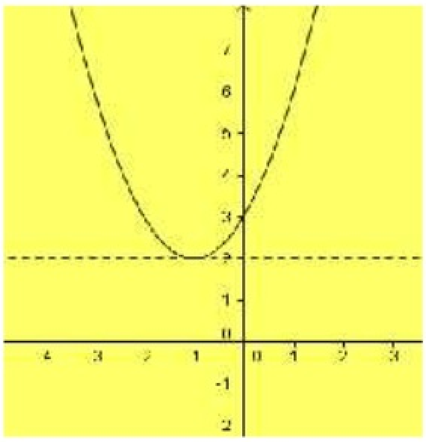
$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25 - 4 = (x+1{,}5)^2 - 6{,}25$$

$$f(x) = (x+1{,}5)^2 - 6{,}25$$



Yang berarti fungsi asal digeser kekiri sejauh 1,5 dan ke bawah sebesar 6,25

Contoh 7



Diketahui sebuah grafik sebagai berikut tentukanlah tranformasi yang dilakukan terhadap fungsi asal, $f(x) = x^2$ sehingga diperoleh grafik tersebut.

Penyelesaian

Karena fungsi bergeser kekiri sejauh 1 satuan dan keatas sejauh 2 satuan, maka bentuk fungsinya adalah

$f(x) = (x+1)^2 + 2$

Operasi dalam Fungsi

Seperti halnya dalam aritmetika, dalam fungsi juga berlaku operasi. Operasi dalam fungsi yang dikenal adalah sebagai berikut:

1. Penjumlahan, f(x) + g(x)
2. Pengurangan, f(x) – g(x)
3. Perkalian, f(x).g(x)
4. Pembagian, f(x)/g(x) untuk g(x) ≠ 0
5. Komposisi, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ atau $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Untuk lebih memahami operasi fungsi marilah kita lihat contoh berikut ini:

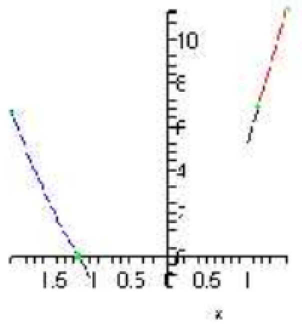
Contoh 8

Misalkan $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, maka tentukanlah hasil dan domain dari

a. $f(x) + g(x)$ b. $f(x) - g(x)$ c. $f(x).g(x)$

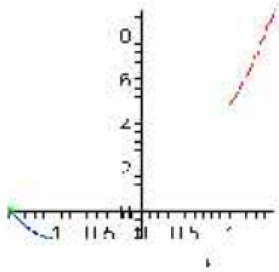
d. $f(x) / g(x)$ e. $f(g(x))$ f. $g(f(x))$

Penyelesaian



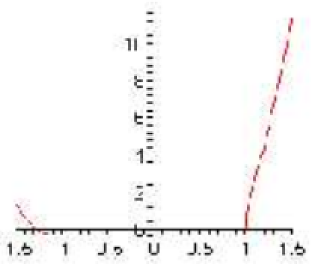
a. $f(x) + g(x) = 3x^2 + 3x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$. dengan demikian $D_{f+g} = \{x \in \mathrm{R} \mid x < -1$ atau $x \geq 1\}$. Cara lain dapat kita lakukan dengan melihat masing-masing domain dari fungsinya. Dalam hal ini, $D_f = \{x \in \mathrm{R}\}$ dan $D_g = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq -1$ atau $x \geq 1\}$dengan mengiriskan kedua domainnya kita dapatkan,$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq -1$ atau $x \geq 1\}$

b. $f(x) - g(x) = 3x^2 + 3x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$. dengan demikian $D_{f-g} = \{x \in R \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 1\}$. Cara lain dapat kita lakukan dengan melihat masing-masing domain dari fungsinya. Dalam hal ini, $D_f = \{x \in R\}$ dan

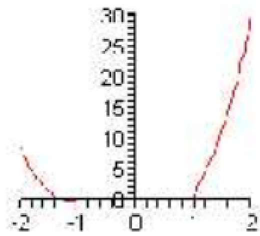


$Dg = \{x \in R \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 1\}$ dengan mengiriskan kedua domainnya kita dapatkan, $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{x \in R \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 1\}$

c. $f(x)/g(x) = (3x^2 + 3x - 1)/\sqrt{x^2 - 1}$. Dengan demikian domainnya adalah sama dengan penjumlahan atau pengurangan dari dua



fungsi, yaitu $D_{f/g} = D_f \cap D_g = \{x \in R \mid x < -1 \text{ atau } x > 1\}$.



d. $f(x).g(x) = (3x^2 + 3x - 1)\sqrt{x^2 - 1}$. Dengan demikian domainnya adalah sama dengan penjumlahan atau pengurangan dari dua fungsi, yaitu $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{x \in R \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 1\}$.

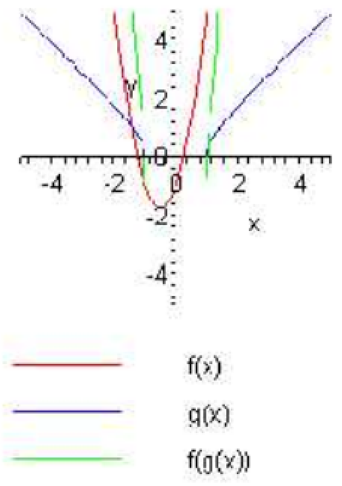
e. $(f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = 3(\sqrt{x^2 - 1})^2 + x(\sqrt{x^2 - 1}) - 1 = 3x^2 - 3 + x\sqrt{x^2 - 1} - 1 = 3x^2 + x\sqrt{x^2 - 1} - 4$. Jadi domainnya adalah $D_{f(g(x))} = D_f \cap D_g = \{x \in R \mid x < -1 \text{ atau } x > 1\}$.

f. $(g(f(x)) = g(3x^2 + 3x - 1) =$

$$\sqrt{(3x^2 + 3x - 1)^2 - 1} = \sqrt{9x^4 + 18x^3 + 3x^2 - 6x}$$

$$\sqrt{x(9x^3 + 18x^2 + 3x - 6)} = \sqrt{x(x+1)(9x^2 + 9x - 6)}\,.$$

Berdasarkan perhitungan akar secara numerikdiperoleh pembuat nolnya adalah x = -1.46, x = -1, x = 0 dan x = 0.457. Berdasarkan nilai fungsinya maka $D_{g^\circ f}$ = {x| x ≤ -1.46 atau -1≤ x ≤ 0 atau x ≥ 0.457}



Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi polinom (fungsi yang memiliki daerah asal x anggota real) memiliki bentuk umum P(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$
2. Fungsi rasional (fungsi dengan daerah asal penyebut tidak sama dengan nol) memiliki bentuk umum, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$.
3. Fungsi trigonometri (fungsi dengan daerah asal di x anggota real)
4. Fungsi eksponen

Selain jenis-jenis fungsi diatas, dalam kalkulus dkenal juga fungsi genap dan fungi ganjil. Jika sebuah fungsi $f(x) = f(-x)$, maka fungsi dinamakan **fungsi genap.** Sedangkan fungsi $f(x) = -f(x)$, maka fungsi tersebut dinamakan **fungsi ganjil.**

Fungsi $f(x) = -2x^2$ adalah fungsi genap karena $f(-x) = -2(-x)^2 = -2x^2 = f(x)$. Sedangkan fungsi $f(x) = -2x^3$ adalah fungsi ganjil, karena $f(-x) = -2(-x)^3 = -2.-x^3 = -(-2x^3) = -f(x)$.

SOAL LATIHAN

1. Tentukanlah persamaan garis yang dari dua titik yang diberikan berikut:
   a. (-1,-2) dan (0,3)
   b. (0, 1) dan (2, 0)
2. Tentukanlah persamaan garis yang melalui titik (-1, 3) dan memiliki gradien berikut
   a. 2 b. -2 c. 0 d. ½
3. Tentukan persamaan gari yang melalui (2,-3) dan
   a. Sejajar dengan $2x + y = 4$
   b. Tegak lurus dengan $2x - y = 3$
4. Sketsalah grafik dari fungsi-fungsi berikut;
   a. $f(x) = -3x + 5$
   b. $f(x) = -x^2 + 5x + 4$
   c. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
   d. $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$
   e. $f(x) = \dfrac{1}{-x + 1}$
   f. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
   g. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
   h. $f(x) = \sin(2x)$
   i. $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$
5. Tentukan domain dan range dari fungsi berikut
   a. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$
   b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
   c. $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$
   d. $f(t) = t^{2/3} - 4$
   e. $G(y) = \sqrt{(y + 1)^{-1}}$
6. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$ tentukanlah
   a. $(f + g)\,(t)$
   b. $(f - g)\,(-2t)$

c. $(f/g)(x)$
d. $f^3(x)$

7. Diketahui fungsi $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ dan $g(x)=2/x$ tentukanlah
   a. h(x) = f(g(x))
   b. p(x) = g(f(x))
   c. apakah h(x) = p(x), jelaskan
   d. Buatlah grafik dari h(x) dan g(x)
   e. Tentukan domain dan range dari h(x) dan g(x)
8. Buatlah sketsa grafik $g(x)=|x+3|-4$ dengan menggeser kurva $g(x)=|x|$?
9. Tentukan jenis fungsi yang dihasilkan, apakah ganjil atau genap atau bukan keduanya, Buktikan, apabila
   a. Jumlah dari dua fungsi genap
   b. Jumlah dari dua fungsi ganjil
   c. Perkalian dari dua fungsi genap
   d. Perkalian dari dua fungsi ganjil
   e. Perkalian dari fungsi genap dan ganjil

BAB 2
LIMIT

Limit sebuah konsep dasar yang mampu mendefinisikan beberapa konsep seperti turunan dan integral. Limit memungkinkan menjelaskan perilaku fungsi pada titik tertentu dimana fungsi tidak bisa dijelaskan secara numerik. Meskipun ide dasarnya berasal dari nilai fungsi biasa.Berbagai jenis fungsi akan dikaji termasuk grafik dan bagaimana menggambar grafik dari sebuah fungsi.
Limit pada dasarnya adalah pendekatan nilai fungsi apabila variable bebas dari fungsi mendekati nilai tertentu

Pada bagian ini, kita akan mengkaji tentang pengertian limit secara intuisi dan formal, limit sepihak, konsep epsilon dan delta sifat-sifat limit dan kekontinuan fungsi pada titik atau interval tertentu.

2.1 Pengertian limit secara intuisi dan formal

2.2 Aturan- Aturan dalam Pencarian Nilai Limit

2.3 Bentuk Tak Tentu, Kekontinuan dan Asymptot

2.1 LIMIT antara Intuitif dan Formal

Limit sebuah konsep dasar yang mampu mendefinisikan beberapa konsep seperti turunan dan integral. Limit memungkinkan menjelaskan perilaku fungsi pada titik tertentu dimana fungsi tidak bisa dijelaskan secara numerik. Meskipun ide dasarnya berasal dari nilai fungsi biasa

Sumber: Google.co.id (gambar limit)

Kata "mendekati", "menuju" merupakan kata yang erat kaitannya dengan konsep limit. Perhatikan sebuah fungsi, $f(x) = 3x + 2$, kita sudah terbiasa dengan penentuan nilai $f(x)$ apabila x "sama dengan" nilai tertentu, misal $x = 2$. Akan tetapi, bagaimana nilai $f(x)$ apabila x "mendekati" nilai tertentu, misal x mendekati 2?.

Pengertian Limit

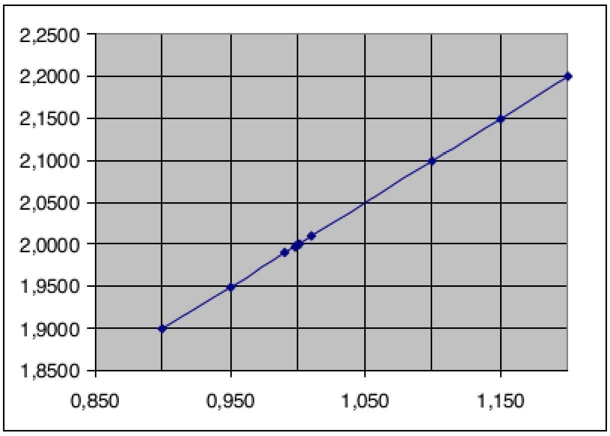
a. ***Pengertian Limit Secara Intuisi***

Sebelum kita mengkaji definisi atau pengertian limit secara intuisi, marilah kita lihat fungsi berikut,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Coba Anda hitung nilai dari $f(x)$ bila $x = 1$?. Tentu saja, kita peroleh 0/0. Untuk ini kita tidak bisa menentukan nilainya secara pasti, yang dalam matematika dikenal dengan bentuk "tak-tentu". Analisis kita tidak hanya berhenti pada satu titik saja. Bagaimana dengan nilai $f(x)$ apabila x mendekati 1? Untuk bisa menjawabnya kita bisa menggunakan excell untuk menghitungnya seperti tampak pada tabel berikut,

X	f(x)
1,200	2,2000
1,150	2,1500
1,100	2,1000
1,010	2,0100
1,001	2,0010
1,000	#DIV/0!
0,999	1,9990
0,998	1,9980
0,990	1,9900
0,950	1,9500
0,900	1,9000



Berdasarkan tabel dan grafik di atas, dapat kita lihat bahwa semakin dekat x ke-1(tetapi tidak sama dengan 1), maka nilai fungsi $f(x)$ semakin mendekati 2, dalam notasi lain kita dapat tuliskan $f(x)\to L$ apabila $x\to c$

Dalam matematika, kita biasa menuliskannya dengan

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

Yang dibaca dengan "limit dari $(x^2\text{-}1)/(x\text{-}1)$ untuk x mendekati 1 adalah 2". Dengan sedikit melakukan manipulasi aljabar kita dapat menunjukkannya dengan baik dan benar.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2\ .$$

Pikirkan dan bandingkan antara limit dan nilai fungsi, apa persamaan dan perbedaannya?

Pada dasarnya kita telah menggunakan definisi intuisi berikut

Definisi
Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke-L.

Definisi diatas mengandung pengertian bahwa nilai $f(x)$ akan mendekati L apabila x mendekati c tetapi tidak pernah sama atau "$f(x) \to L$ apabila $x \to c$"

Untuk lebih memahami pengertian limit, marilah kita perhatikan contoh-contoh berikut ini,

Contoh 1
Carilah nilai dari $\lim_{x \to 2}(2x - 3)$

Penyelesaian. Jika x dekat 2, maka $2x - 5$ dekat dengan $2.2 - 3 = 1$. Kita tuliskan dengan $\lim_{x \to 2}(2x - 3) = 1$

Contoh 2. Carilah $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

Penyelesaian.
Karena fungsi $(x^2 + x - 6)/(x+3)$ tidak terdefinisi di $x = -3$, but it's no problem. Dengan sedikit manipulasi aljabar kita bisa lakukan, yaitu

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x \to -3}(x - 2) = -5\,.$$

Kita bisa mencoret $(x + 3)$ karena nilai $(x + 3)$ tidak pernah 0 (ingat kembali pengertian limit). Dalam hal ini, kita tidak melakukan pembagian dengan 0.

Contoh 3. Carilah nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{\sqrt{2x} - 2}$

Penyelesaian

Manipulasi aljabar diperlukan untuk menyederhanakan fungsi yang berbentuk rasional. Untuk itu diperlukan perkalian sekawan dalam kasus ini, sehingga

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{\sqrt{2x} - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{\sqrt{2x} - 2} = \lim_{x \to 2} (\sqrt{2x} + 2) = \sqrt{4} + 2 = 4$$

Contoh 4. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Penyelesaian.

Dalam hal ini, kita tidak bisa meminta bantuan aljabar untuk menyelesai-kan soal tersebut. Bantuan kalkulator atau komputer sepertinya tepat kita gunakan untuk melihat nilai limit tersebut.

X	sin(x)/x
1	0,841470985
0,5	0,958851077
0,1	0,998334166
0,01	0,999983333
0,001	0,999999833
0	#DIV/0!
0,01 -0,001	0,999983333 0,999999833
-0,1	0,998334166
-0,5	0,958851077
-1	0,841470985

Berdasarkan table disamping,kita bisa simpulkan, meskipun belum kuat, bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Contoh 5. (terlalu banyak goyangan).

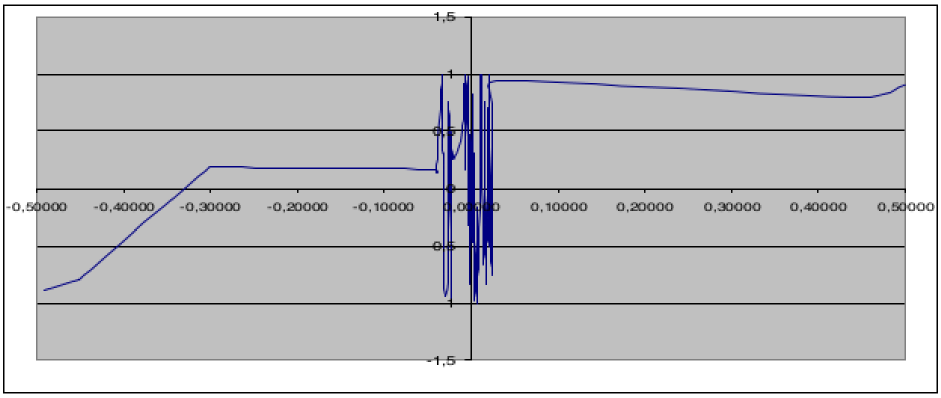
Carilah nilai dari $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$

Penyelesaian

Kembali aljabar tidak bisa membantu untuk menyelesaikan persoalan ini. Dengan bantuan komputer, kita coba dekati berbagai nilai yang menuju ke-0.

x	sin(1/x)	X	sin(1/x)	x	sin(1/x)
0,50000	0,909297427	0,00700	-0,99636	-0,02000	0,262375
0,45000	0,795220057	0,00600	-0,16155	-0,02100	0,475171
0,03000	0,940529577	0,00500	-0,8733	-0,02200	-0,99515
0,02500	0,74511316	0,00400	-0,97053	-0,02300	0,482964
0,02400	-0,735200329	0,00300	0,318846	-0,02400	0,7352
0,02300	-0,482963793	0,00200	-0,46777	-0,02500	-0,74511
0,02200	0,995148072	0,00100	0,82688	-0,02600	-0,69068
0,02100	-0,475170518	**0,00000**	**#DIV/0!**	-0,02700	0,614755
0,02000	-0,262374854	-0,00100	-0,82688	-0,02800	0,915507
0,01900	0,700070459	-0,00200	0,467772	-0,02900	-0,07469
0,01800	-0,837729565	-0,00300	-0,31885	-0,03000	-0,94053
0,01700	0,762216923	-0,00400	0,970528	-0,03100	-0,74607
0,01600	-0,325795555	-0,00500	0,873297	-0,03200	0,165166
0,01500	-0,639018014	-0,00600	0,161545	-0,03300	0,896983
0,01400	0,736620456	-0,00700	0,996362	-0,03400	0,907558
0,01300	0,998944802	-0,00800	0,61604	-0,03500	0,292743
0,01200	0,996710927	-0,00900	0,914944	-0,03600	-0,4764
0,01100	0,195822428	-0,01000	0,506366	-0,03700	-0,94813
0,01000	-0,506365641	-0,01100	-0,19582	-0,03800	-0,92576
0,00900	-0,914943635	-0,01200	-0,99671	-0,40000	-0,59847
0,00800	-0,616040459	-0,01300	-0,99894	-0,50000	-0,9093

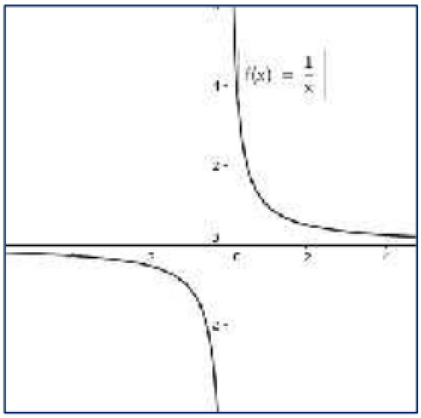
Perhatikan nilai-nilai disekitar x dekat 0, ternyata nilai-nilai sin(1/x) berubah tanda dari (-) ke Positif (+) dengan cepat atau sebaliknya. Fungsi yang demikian dikatakan sebagai fungsi yang banyak goyangan. Perhatikan gambar grafiknya (dengan menggunakan software Maple) sebagai berikut:



Berdasarkan analisa dari tabel dan grafik di atas, dapat kita simpulkan bahwa nilai dari $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tidak ada.

b. ***Pengertian Limit Sepihak***

Perhatikan fungsi, $f \; x = \frac{1}{x}$, dan grafiknya berikut;



Berapakah nilai $f(x)$ apabila x mendekati 0?

atau

berapakah nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$?

Bila kita amati, nilai $f(x)$ akan semakin besar apabila x menuju 0 dari arah kanan, akan tetapi semakin negatif kenilai yang besar.

Dalam banyak persoalan, kita tidak senaniasa dapat menentukan nilai limit pada setiap titiknya. Seperti halnya, fungsi tangga atau fungsi yang mempunyai lompatan, pada titik-titik tertentu. Untuk kasus demikian, memungkinkan kita untuk mengkaji tentang limit-limit **sepihak**. Misalkan lambang $x \to c^{+}$ berarti x mendekati c dari kanan, dan andaikan $x \to c^-$ berarti x mendekati c dari arah kiri. Berkaitan dengan persoalan ini, kita memiliki definisi berikut,

Definisi :**(Limit-kiri dan limit-kanan).**
Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ dekat ke-L. Sedangkan untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ dekat ke-L.

Teorema berikut akan membantu Anda untuk lebih memahami pemahaman tentang hubungan antara limit-kiri dan limit-kanan dengan limit di sebuah titik.

Teorema
$\lim_{x \to c} f(x) = L$ **jika dan hanya jika** $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ **dan** $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

Contoh-contoh berikut akan membantu Anda untuk lebih memahami definisi dan teorema di atas.

Contoh 1. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika, } x \le 0 \\ x & \text{jika, } 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & \text{jika, } x \ge 1 \end{cases}$$

Kemudian cari masing-masing yang berikut atau nyatakan jika tidak ada

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) f(1)

(c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

Penyelesaian

(a) untuk menentukan limit x mendekati 0, berdasarkan teorema di atas, kita harus melihat limit-kiri dan limit-kanannya. Untuk itu, perhatikan juga definisi fungsi $f(x)$ nya.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ (karena $f(x) = x^2$ apabila x mendekati 0 dari kiri)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ (karena $f(x) = x$ apabila x mendekati 0 dari kanan)

Karena $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, maka $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

(b) $f(1) = 1 + 1^2 = 2$, karena fungsi $f(x)$ di $x = 1$ adalah $f(x) = 1 + x^2$

(c) Untuk menentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, maka kita mesti menentukan limit-kiri dan limit-kanan untuk x mendekati 1.

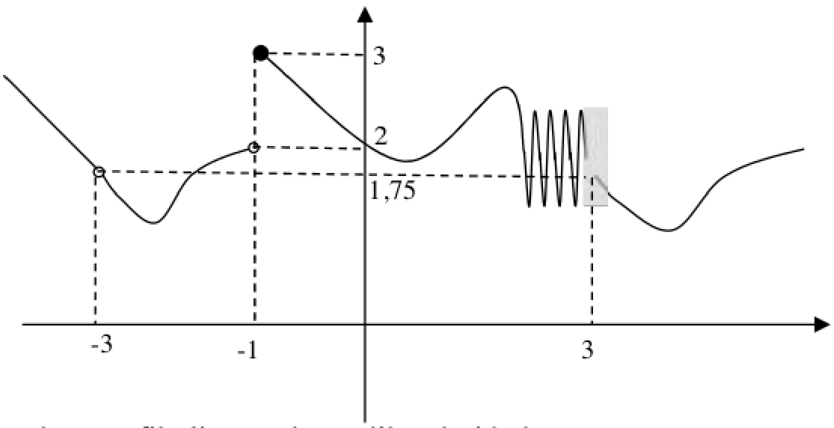
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$ dan $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1 + x^2) = 1 + 1^2 = 2$

Karena $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, maka $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tidak ada

(d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ seperti sudah kita kerjakan pada bagian c.

Contoh 2

Perhatikan grafik fungsi berikut ini



Berdasarkan grafik di atas, dapat diketahui bahwa

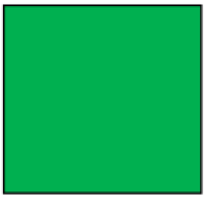
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1{,}75$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ tidak ada,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 1{,}75$

c. *Pengetian Formal tentang Limit*

Seorang petani bermaksud mengukur kebunnya yang berukuran 10 m x 10 m dengan kawat berduri. Apabila kesalahan pengukuran keliling yang ditoleransi adalah 1 m. Berapakah kesalahan yang diperbolehkan untuk masing-masing sisinya?

Persoalan tersebut dapat kita modelkan secara matematis sebagai berikut,



karena ukuran sama maka kebun berbentuk persegi, misalkan panjang sisi = x, sehingga keliling, $L(x) = 4x = 4(10) = 40$.

Toleransi pengukuran,

$L(x) = 40 \pm 1$ atau bisa dinyatakan dengan $40 - 1 \le L(x) \le 40 + 1$. Karena keliling, $L(x) = 40 + 4x$, maka

$40 - 1 \le L(x) \le 40 + 1$

$40 - 1 \le 40 + 4x \le 40 + 1$

$-1 \le 4x \le 1$ atau

$-0{,}25 \le x \le 0{,}25$

Pada pembahasan sebelumnya Anda telah dikenalkan pada pengertian limit secara intuisi. Hal ini tentu akan memberikan keraguan atau menimbulkan pertanyaan. Pertanyaan-pertanyaan seperti seberapa dekat x dengan c? Seberapa dekat nilai $f(x)$ dengan L? Adakah hubungan dekatnya x ke c dengan dekatnya $f(x)$ ke-L?. Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut kita akan membuat definisi persis tentang limit.

Sebelum kita melihat definisi persis tentang limit, marilah kita sepakati simbol ε(epsilon) dan δ(delta) untuk menyatakan bilangan-

bilangan positif yang kecil atau sangat kecil. Untuk menyatakan f(x) berbeda dari L lebih kecil dari ε sama saja dengan menyatakan

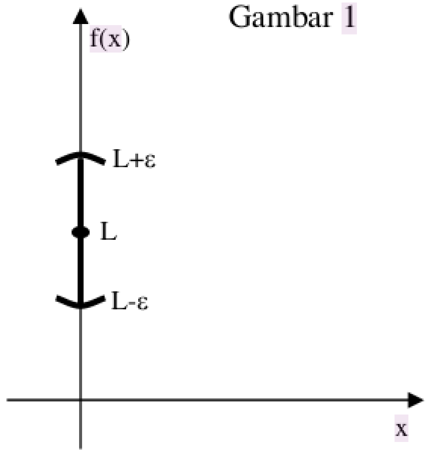
$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ atau } L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Hal ini juga berarti f(x) berada pada selang buka $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ seperti pada gambar 1.

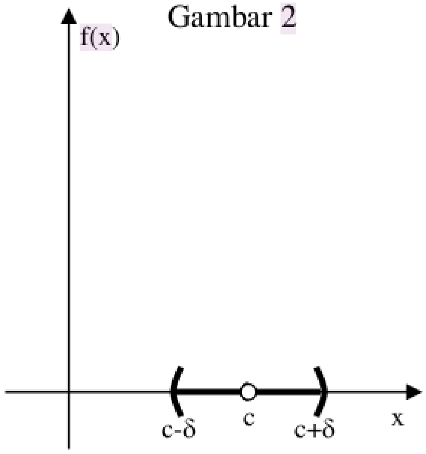
Selanjutnya untuk mengatakan x dekat tetapi berlainan dengan c sama saja dengan mengatakan untuk suatu δ, x terletak dalam selang buka $(c - \delta, c + \delta)$ dengan c tidak diikutkan. Cara terbaik menunjukkannya adalah dengan menuliskan

$0 < |x - c| < \delta$ seperti ditunjukkan pada gambar 2.

Gambar 1



Gambar 2



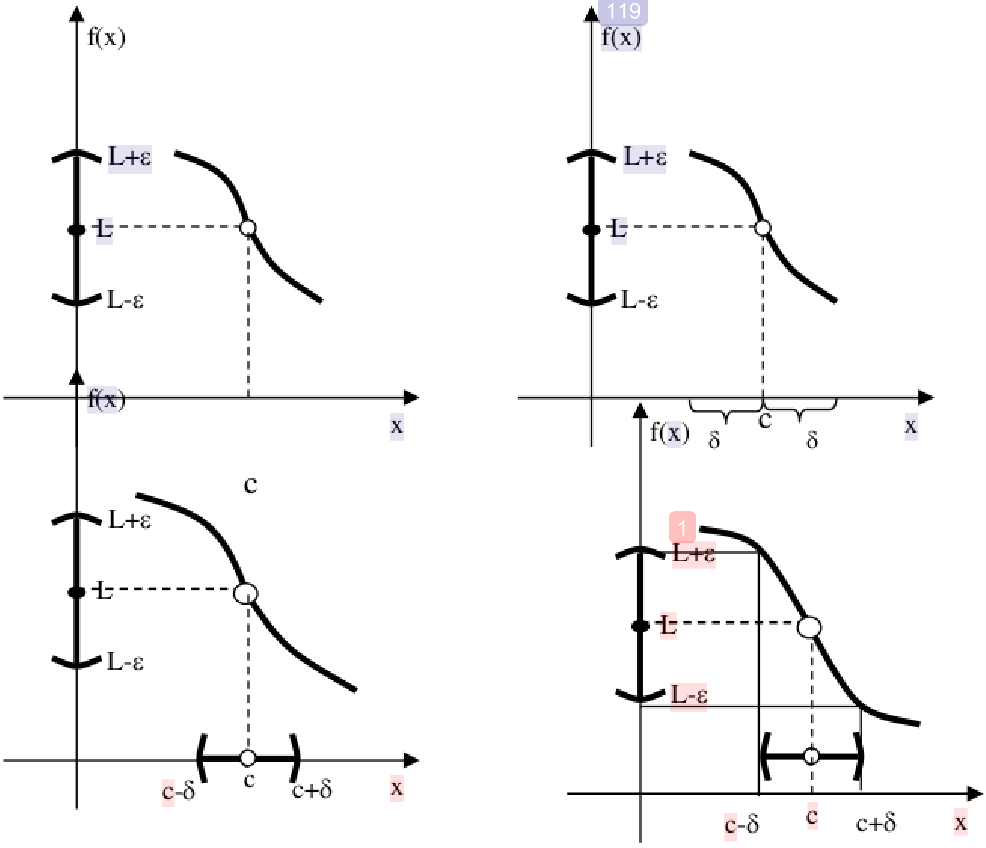
Selanjutnya kita siap dengan definisi persis tentang pengertian limit.

Definisi:(Pengertian persis tentang limit).
Mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi di atas merupakan senjata yang sangat ampuh untuk membuktikan nilai limit tertentu. Pada kajian berikutnya, kita akan mencoba membuktikan beberapa contoh nilai limit yang diketahui.

Selain itu, kita berusaha menyatakan bukti secara formalnya. Ilustrasi gambar-gambar berikut merupakan visualisasi langkah-langkah pembuktian yang diambil.



Pada beberapa contoh berikut, dalam membuktikan limit, kita akan mengawalinya dengan analisis awal. Analisis awal ini sebenarnya bukan bagian dari bukti melainkan sebuah pekerjaan yang digunakan untuk menyampaikan bukti formalnya.

Contoh 1 Buktikan bahwa $\lim_{x\to 2}(2x-3)=1$

ANALISIS AWAL.

Andaikan ε bilangan positif *sembarang*. Kita mesti menghasilkan δ > 0 sedemikian sehingga

$$0 < | x - 2 | < \delta \Rightarrow | (2x - 3) - 1 | < \varepsilon$$

Perhatikan ketaksamaan pada bagian kanan (Analisis Pendahuluan)

$$|(2x-3)-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-4| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |2|\,|x-2| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon/2$$

Sekarang kita bisa memilih δ, yakni $\delta = \varepsilon/2$. tentu saja, untuk δ yang lebih kecil akan memenuhi.

BUKTI FORMAL.

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon/2$ sedemikian sehingga

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(2x-3)-1| = |2x-4|$$
$$= |2(x-2)|$$
$$= |2(x-2)| < 2\delta = \varepsilon$$

Sekarang kita coba ambil atau pilih $\delta = \varepsilon/3$ sedemikian sehingga

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(2x-3)-1| = |2x-4|$$
$$= |2(x-2|$$
$$= |2(x-2)| < 2\delta = 2.\ \varepsilon/3 < \varepsilon$$

Jadi, tetap akan memenuhi.

Contoh 2 Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} = -5$

ANALISIS AWAL.

Kita akan menentukan δ sedemikian sehingga

$$0 < |x+3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2+x-6}{x+3} - 5 \right| < \varepsilon$$

Sekarang untuk $x \neq -3$,

$$\left|\frac{x^2+x-6}{x+3}+5\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}+5\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(\mathrm{x}-2)+5|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(\mathrm{x}+3|<\varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\delta = \varepsilon$

BUKTI FORMAL.

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon$ sedemikian sehingga

$$0<|x+3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+x-6}{x+3}-5\right| = \left|\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}+5\right| = |(x-2)+5|$$

$$= |x+3| < \delta = \varepsilon$$

Contoh 3. Buktikan bahwa jika $c > 0$, $\lim_{x\to c}\sqrt{x} = \sqrt{c}$

ANALISIS AWAL.

Kita mesti mencari δ sedemikian sehingga

$$0<|x-c|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{c}\right|<\varepsilon$$

Sekarang,

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{c}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}\right| = \left|\frac{x-c}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}\right|$$

$$= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}$$

Bentuk terakhir mesti kurang dari ε,maka harus dibuat $|x - c| < \varepsilon\sqrt{c}$.

BUKTI FORMAL.

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$ sedemikian sehingga

$$0<|x-c|<\delta \Rightarrow \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right|$$

$$= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

Perlu diingat bahwa syarat akar adalah $x \geq 0$, sehingga berimplikasi pada $|x-c|<\delta$

atau $c-\delta < x < c + \delta$. Karena x mesti taknegatif, maka haruslah $\delta \leq c$. Jadi untuk memilih δ haruslah lebih kecil dari c dan $\varepsilon\sqrt{c}$.

Contoh 4. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 1}(x^2 + 3x - 2) = 2$

ANALISIS AWAL.

Seperti sebelumnya kita mesti mencari δ sedemikian sehingga

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(x^2 + 3x - 2) - 2| < \varepsilon$$

Selanjutnya,

$$|(x^2 + 3x - 2) - 2| = | x^2 + 3x - 4| = |x + 4|.|x - 1|$$

Kita tahu bahwa faktor $|x-1|$ dapat dibuat sekecil yang kita inginkan, maka cukup dengan membatasi faktor $|x + 4|$. Untuk melakukan hal ini, pertama kita pilih saja $\delta \leq 1$. kemudian $|x - 1| < \delta$ mengakibatkan

$$\begin{aligned} |x + 4| &= |x - 1 + 5| \\ &\leq |x - 1| + |5| \text{ (ketaksamaan segitiga)} \\ &\leq 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$

Jadi, untuk menghasilkan $|x + 4|.|x - 1|$ yang lebih kecil dari ε, maka mengisyaratkan bahwa $\delta \leq \varepsilon/6$.

BUKTI FORMAL.

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Pilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/6\}$, yaitu pilih δ sebagai yang terkecil dari 1 sampai $\varepsilon/8$ sedemikian sehingga

$$|(x^2 + 3x - 2) - 2| = | x^2 + 3x - 4| = |x + 4|.|x - 1| < 8.\ \varepsilon/8 = \varepsilon$$

SOAL LATIHAN

Estimasi nilai limit berikut ini dengan melengkapi tabel terlebih dahulu

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

x	0,09	0,9	0,99	1,01	1,1	1,11
$f(x)$						

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$

x	-1,09	-1,9	-1,99	-2,01	-2,1	-2,11
$f(x)$						

Tentukan nilai dari limit berikut ini

3. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)$
4. $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{1}{2}x+3)$
5. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-1)$
6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-3x+1)$
7. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x)$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2+6x-7}$
9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$
10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x-8)}{2x^2-8}$
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-1}$
13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}$
15. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-8}{t-2}$
16. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-4}{\sqrt{2t}-2}$
17. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^5-1}$

Buktikan dengan konsep ε dan δ nilai limit berikut ini

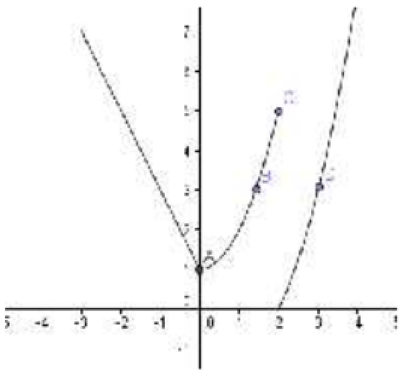
18. $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)=14$
19. $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{1}{2}x+1)=\frac{1}{2}$
20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}=-5$
21. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+1)=5$

22. $\lim_{x \to -1} (x^2 + 3x + 5) = 3$

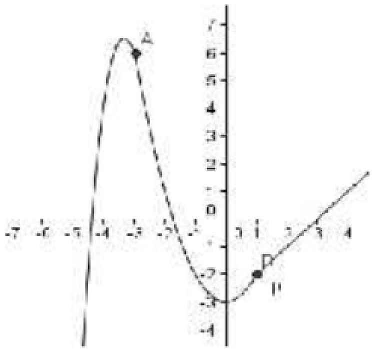
23. $\lim_{x \to 3} \sqrt{2x + 3} = 3$

Analisa grafik berikut dan tentukan apakah fungsi mempunyai limit pada titik yang diberikan

24.



25.



26. Diketahui fungsi *f* yang didefinisikan berikut ini,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le -1 \\ 2x + 3, & -1 < x < 3 \\ x^2 - 2x, & x \ge 3 \end{cases}$$

Tentukanlah

a. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

b. $\lim_{x \to -1} f(x)$

c. $\lim_{x \to 3} f(x)$

27. Diketahui sebuah fungsi $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$. Sketsalah sebuah grafik, kemudian hitunglah nilai dari,

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

28. Diketahui sebuah fungsi, f yang didefinisikan berikut ini

$$f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$$

Sketsalah sebuah grafik dan estimasi nilai $\lim_{x \to 0} f(x)$

2.2 ATURAN MENCARI NILAI LIMIT

Aturan dan Sifat-sifat Limit Fungsi

Berdasarkan definisi formal di atas, kita dapat menurunkan beberapa sifat dari limit fungsi. Sifat-sifat tersebut, dalam kalukulus, dikenal dengan teorema tentang limit fungsi. Melalui sifat tersebut kita bisa menentukan limit fungsi pada suatu titik tertentu yang lebih kompleks.

Sifat-sifat limit fungsi dapat dilihat pada teorema berikut;

Teorema Limit Fungsi

Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = L$ **dan** $\lim_{x\to c} g(x) = M$ **serta** k adalah sebuah konstanta, maka berlaku

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} k.f(x) = k.\lim_{x\to c} f(x) = kL$
4. $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$
5. $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$
6. $\lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x) = L.M$
7. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$
8. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ bilamana n genap.

Untuk lebih menyakinkan keberlakuan sifat-sifat di atas marilah kita lihat bukti dari sifat tersebut.

1. $\lim_{x\to c} k = k$

Bukti

Ambil $\varepsilon > 0$ sembarang, pilih δ positif sembarang, sedemikian sehingga

Jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|k - k| = 0 < \varepsilon$

Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x\to c} k = k$

2. $\lim_{x\to c} k.f(x) = k.\lim_{x\to c} f(x) = kL$

Bukti

Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\delta_1 = \varepsilon/|k|$ sedemikian sehingga
Jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon/|k| < \varepsilon$

Sekarang untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \delta_1 = \varepsilon/|k|$ sedemikian sehingga

Jika $0 < |x - c| < \delta$ maka

$$|k.f(x) - k.L| = |k(f(x) - L)| = |k||f(x) - L| < |k|.(\varepsilon/|k|) = \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} k.f(x) = kL$ ....(1)

Dengan mengalikan k pada kedua ruas dari $\lim_{x\to c} f(x) = L$ kita peroleh

$k.\lim_{x\to c} f(x) = kL$ ....(2)

Jadi, berdasarkan (1) dan (2) didapatkan

$$\lim_{x\to c} k.f(x) = k.L = k.\lim_{x\to c} f(x) \text{ atau } \lim_{x\to c} k.f(x) = k.\lim_{x\to c} f(x) = kL$$

3. $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

Bukti

Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang, ada $\delta_1 = \varepsilon/2$ sedemikian sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Karena $\lim_{x\to c} g(x) = M$, maka untuk setiap ε > 0 sembarang, ada δ_2= ε/2 sedemikian sehingga jika 0 < |x – c| <δ maka |g(x) – M|< ε/2 < ε.

Selanjutnya,

Untuk setiap ε > 0, pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sedemikian sehingga

Jika 0 < |x – c| < δ maka

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Bagian akhir menunjukkan bahwa $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

4. $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

Bukti

Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka untuk setiap ε > 0 sembarang, ada δ_1= ε/2

sedemikian sehingga

jika 0 < |x – c| <δ maka |f(x) – L|< ε/2 < ε.

Karena $\lim_{x\to c} g(x) = M$, maka untuk setiap ε > 0 sembarang, ada δ_2= ε/2 sedemikian sehingga

jika 0 < |x – c| <δ maka |g(x) – M|< ε/2 < ε.

Selanjutnya,

Untuk setiap ε > 0, pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sedemikian sehingga

Jika 0 < |x – c| <δ maka

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (L - M)| &= |(f(x) - L) + (M - g(x)| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Bagian akhir menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

5. $\lim_{x \to c}(f(x).g(x)) = \lim_{x \to c} f(x).\lim_{x \to c} g(x) = L.M$

BUKTI

Untuk membuktikan kesamaan ini, kita perlu melakukan manipulasi berikut,dengan demikian,

$$|f(x).g(x) - L.M| = |g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M)|$$
$$\leq |g(x)(f(x) - L)| + |L(g(x) - M)|$$

Karena $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang, ada $\delta_1 = \varepsilon/2|L|$ sedemikian sehingga,

jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|g(x) - M| < \varepsilon/2|L| < \varepsilon$.

Berdasarkan sifat ketaksamaan harga mutlak, kita peroleh

$$|g(x)| - |M| \leq |g(x) - M| < \varepsilon \text{ atau } |g(x)| < \varepsilon + |M|$$

Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang,

ada $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(\varepsilon + |M|)}$ sedemikian sehingga

jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(\varepsilon + |M|)} < \varepsilon/|M| < \varepsilon$.

Selanjutnya, Untuk setiap $\varepsilon > 0$,

pilih $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2(\varepsilon + |M|)}, \dfrac{\varepsilon}{2|L|}\right\}$ sedemikian sehingga untuk

$$\begin{aligned}\left|f(x).g(x)-L.M\right| &= \left|g(x)(f(x)-L)+L(g(x)-M)\right| \\ &\le \left|g(x)(f(x)-L)\right|+\left|L(g(x)-M)\right| \\ &\le \left|g(x)\right|\left|f(x)-L\right|+\left|L\right|\left|g(x)-M\right| \\ &< (\varepsilon+\left|M\right|).\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+\left|M\right|)}+\left|L\right|.\frac{\varepsilon}{2\left|L\right|}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

Bukti selanjutnya Anda lakukan sendiri sebagai latihan.

Teorema di atas merupakan prosedur yang dapat kita lakukan untuk menentukan nilai limit dari sebuah fungsi. Selain itu, aturan atau teorema di atas secara tidak didasari telah Anda lakukan pada saat SMA. Pada prakteknya, penghitungan nilai limit hampir sama dengan penghitungan pada nilai fungsi.

Bagaimana cara teorema tersebut bekerja, dapat kita pelajari beberapa contoh berikut,

CONTOH 1

Carilah $\lim\limits_{x\to 3} 3x^5$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 3} 3x^5 \overset{3}{=} 3\lim_{x\to 3} x^5 \overset{8}{=} 3\left[\lim_{x\to 3} x\right]^5 \overset{2}{=} 3[3]^5 = 3.243 = 729$$

CONTOH 2

Carilah $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3 - x^2)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2) \overset{4}{\underset{2}{=}} \lim_{x\to 2} 2x^3 - \lim_{x\to 2} x^2 &\overset{3}{=} 2.\lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} x^2 \\ &\overset{8}{=} 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 - \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2\end{aligned}$$

$$= 2.\,2^3 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

CONTOH 3

Jika $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$ dan $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 8$, Cari $\lim\limits_{x\to 3}\left[f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}\right]$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 3}\left[f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}\right] = \overset{\overset{6}{\downarrow}}{\lim_{x\to 3}} f^2(x).\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)} \overset{\overset{8}{\downarrow}}{=} \left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2.\sqrt[3]{\lim_{x\to 3} g(x)}$$

$$= 4^2.\sqrt[3]{8} = 16.2 = 32$$

Untuk fungsi yang berbentuk polinom atau fungsi rasional, seperti bentuk berikut;

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dan

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Kita bisa menggunakan teorema berikut untuk menentukan nilai limitnya

Teorema:(Teorema Substitusi).
Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, asalkan pada kasus fungsi rasional penyebutnya di c tidak sama dengan 0.

Contoh 4. Cari $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2} = \frac{3(2)^4 - 2(2)^3 + 2^2 + 3}{2^2 - 2.2 + 2} = \frac{48 - 16 + 4 + 3}{2} = \frac{39}{2}$$

Contoh 5. Cari $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^4 - 2x^3 + 3}{x^2 - 2x}$

Penyelesaian

Pertama kita lakukan manipulasi aljabar untuk melihat karakteristik dari pembilang dan penyebutnya

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^4-2x^3+3}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^4-2x^3+3}{x(x-2)}$$

Karena penyebutnya mempunyai nilai limit = 0, maka teorema di atas tidak bisa kita gunakan. Akan tetapi pembilangnya = 35, jadi semakin x mendekati 2, kita akan membagi bilanga yang dekat 35 dengan bilangan yan dekat ke-0. hasil pembaianini adalah sebuah bilangan positif yang sangat besar. Dalam hal ini, kita bisa katakan nilai menuju ∞.

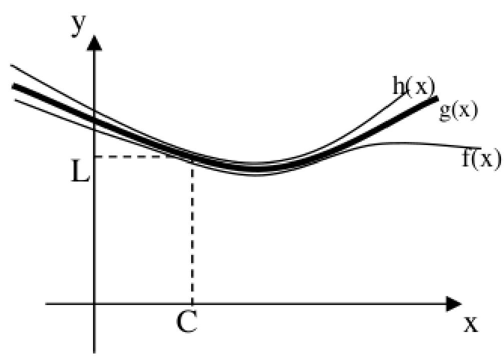
Contoh 6. Cari $\lim_{t\to 2}\frac{t^2-3t+2}{t^2-2t}$

Penyelesaian

Sama halnya dengan contoh 4, kita tidak bisa menggunakan teorema karena penyebutnya bernilai 0 untuk t endekati 2. Dengan sedikit manipulasi aljabar, kita bisa menyederhanakan bentuk di atas, menjadi

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-3t+2}{t^2-2t}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t-1)}{t(t-2)}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-1)}{t}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

Sifat limit fungsi yang lain adalah dikenal dengan **teorema Apit**. Teorema ini sama halnya dengan ungkapan "Saya terjebak diantara batu dan tempat yang keras?". Kalau batu kita analogikan dengan fungsi f(x), tempat yang keras dengan h(x), dan saya terjebak



sebagai fungsi g(x). Cobalah Kita perhatikan gambar disamping,

Teorema Apit

Misalkan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

untuk setiap x dekat c, kecuali mungkin di c, maka

$$\text{jika } \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L \text{, maka } \lim_{x \to c} g(x) = L$$

Bukti

Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang.

Pilih δ_1 sedemikian sehingga

$$0 < | x - c | < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

dan δ_2 sedemikian sehingga,

$$0 < | x - c | < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Pilih δ_3, sedemikian hingga

$$0 < | x - c | < \delta_3 \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Misalkan $\delta = \min\{\delta_3, \delta_3, \delta_3\}$.

$$0 < | x - c | < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} g(x) = L$

Contoh 7

Diketahui bahwa

$$1 - \frac{x^2}{6} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

untuk semua x kecuali di $x = 0$. Apa yang dapat disimpulkan?

Penyelesaian

Misalkan

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6}\ ,\ g(x) = \frac{\sin x}{x}\ , \text{dan } h(x) = 1\,.$$

Berdasarkan hal ini, maka

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0} h(x)$$

dengan menerapkan teorema di atas, maka

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Selanjutnya kita akan membahas limit untuk fungsi trigonometri. Aturan penentuan limit fungsi trigonometri dituangkan dalam teorema berikut;

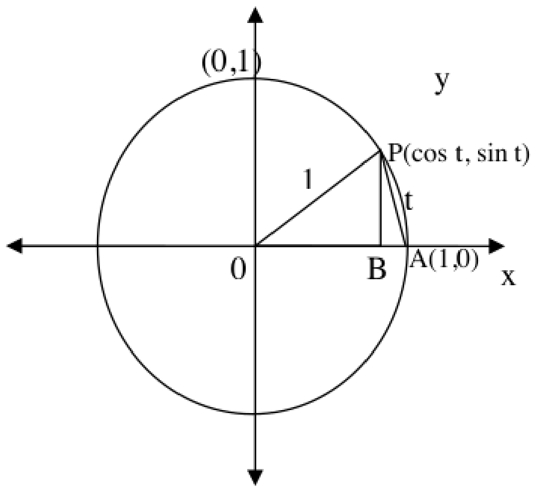
Teorema (Limit fungsi trigonometri)

Untuk setiap bilangan real c dalam domain fungsinya, maka berlaku

1. $\lim\limits_{t\to c} \sin t = \sin c$	**2.** $\lim\limits_{x\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim\limits_{t\to c} \tan t = \tan c$	**4.** $\lim\limits_{x\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim\limits_{t\to c} \sec t = \sec c$	**6.** $\lim\limits_{x\to c} \csc t = \csc c$

Bukti (untuk nomor 1)

Pertama kita akan mengkaji untuk kasus c = 0. Misalkan t > 0 dan misalkan titik A, B dan P didefinisikan seperti pada gambar disamping. Berdasarkan gambar maka diperoleh



0 < |BP| < |AP| < arc(AP)

Tetapi |BP| = sin t dan arc AP = t,

sehingga 0<sin t< t

Jika t < 0, maka t < sin t < 0. dengan menggunakan teorema apit dapat disimpulkan bahwa $\lim_{t \to 0} \sin t = 0$. Untuk membuktikan (1) kita juga perlu menggunakan

$$\lim_{t \to 0} \cos t = \lim_{t \to 0} \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t \to 0} \sin^2 t\right)} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

Sekarang kita akan tunjukkan bahwa

$$\lim_{t \to c} \sin t = \sin c \, .$$

Untuk itu, pertama misalkan h = t-c sedemikian sehingga untuk t→c. Maka

$$\begin{aligned}\lim_{t \to c} \sin t = \lim_{h \to 0} \sin(c + h) &= \lim_{h \to 0} (\sin c . \cos h + \cos c \sin h) \\ &= \sin c \lim_{h \to 0} \cos h + \cos c . \lim_{h \to 0} \sin h \\ &= \sin c .(1) + \cos c(0) = \sin c\end{aligned}$$

Bukti-bukti lainya dapat Anda kerjakan dengan mengikuti bukti di atas.

Berbagai teorema yang telah kita pelajari dapat digunakan secara bersama-sama untuk menentukan nilai limit fungsi.

Contoh 8. Tentukan $\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t + 1}$

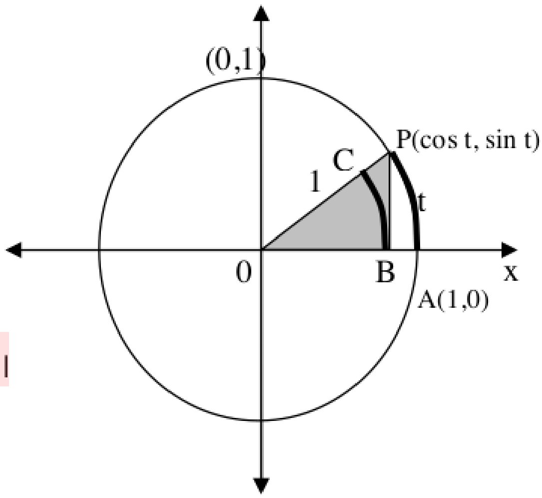
Penyelesaian

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t + 1} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t + 1} . \lim_{t \to 0} \cos t = 0.1 = 0$$

Selanjutnya kita akan menunjukkan teorema yang penting dalam menentukan nilai limit fungsi trigonometri.

Teorema

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ **2.** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}=0$



Bukti 1

Berdasarkan gambar disamping kita peroleh luas OBC $\leq$ luas OBP $\leq$ luas OAP

Sehingga

$$\frac{1}{2}(\cos t)^2\,|\,t\,|\leq\frac{1}{2}\cos t\,|\sin t\,|\leq\frac{1}{2}1^2\,|\,t\,|$$

Dengan mengalikan 2 pada masing-masing bagiannya dan membagi dengan |t|, maka

$$\cos t\leq\frac{\sin t}{t}\leq\frac{1}{\cos t}$$

Dengan menggunakan teorema apit dan limitfungsi trigonometri akan kita dapatkan

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

Bukti 2

Untuk membuktikannya kita hanya perlu melakukan operasi aljabar berikut

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}.\frac{1+\cos t}{1+\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}.\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}=1.0=0$$

Untuk lebih mendalami berbagai teorema yang telah kita bahas marilah kita perhatikan beberapa contoh berikut,

Contoh 9. Tentukan limit dari

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ (b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{\sin t}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan x}$

Penyelesaian

(a) Sedikit manipulasi aljabar dapat dilakukan sehingga

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}.$$

Dengan menggunakan manipulasi $y=3x$, maka $y\to 0$ jika dan hanya jika $x\to 0$,

sehingga

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

Jadi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.1=3$$

(b) Dengan membagi pembilang dan penyebutnya dengan t, maka kita peroleh

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{0}{1}=0$$

(c) Dengan menggunakan langkah yang sama pada poin b, maka

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin x}{x\cos x}}=\frac{4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)}=\frac{4}{1.1}=4$$

SOAL LATIHAN

Diketahui $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 2$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 1$ **dan** k **adalah konstanta dibilangan real. Tentukanlah nilai dari limit berikut ini**

1. $\lim\limits_{x\to c}(5 + k.f(x))$
2. $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x) - 2.g(x)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to c}\left(f^2(x) - 2.g(x)\right)$
4. $\lim\limits_{x\to c}\left(f^2(x) - 2.f(x) + 1\right)$
5. $\lim\limits_{x\to c}\left(f^2(x).g(x)\right)$
6. $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f^2(x) - 2}{f(x) - 2}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f^2(x) - 4.f(x)g(x) + 4g^2(x)}{f(x) - 2g(x)}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f(x) - 2}{\sqrt{f(x)} - \sqrt{2}}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{2g^3(x) - 2}{\sqrt{g(x)} - 1}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f^2(x) - 4g(x)}{\sqrt{f(x)} - \sqrt{2}g(x)}\right)$

Tentukanlah nilai dari limit berikut ini

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3 - x^2\right)$
12. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3 - 2x^2 + x^3\right)$
13. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3 - 2x^2 + x^3}{x + 1}\right)$
14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2 + 4x + 2}}{x + 2}$
15. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x}{x^2 + 2x}$
16. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3 - x^3\right)^{\frac{5}{3}}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos x$
18. $\lim\limits_{t\to \pi/2}\left(t - 2\sin t\right)$
19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}$
20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{12(\sqrt{x} - 1)}{x^2 - 2}$

Tentukan nilai limit dari fungsi trigonometri berikut ini

21. $\lim\limits_{x\to 2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$
22. $\lim\limits_{x\to 2}\tan\left(\dfrac{\pi x}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right)$
23. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{5t}$
24. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3 - 3\cos t}{5t}$
25. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t - \sin t\cos t}{2t^2}$

26. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t \tan t}{2t}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot \pi x \sin x}{2 \sec x}$

29. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t}$

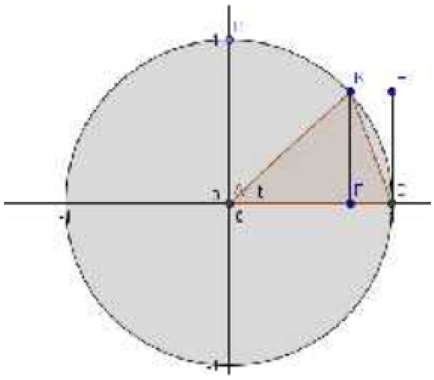
30. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 2t}{\sin 2t - 1}$

31. Misalkan $y = \sqrt{x}$ dan titik M, N. O, P dengan koordinat $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ dan (x,y) pada grafik y. Tentukanlah

    a. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\text{keliling dari } \Delta\text{NOP}}{\text{keliling dari } \Delta\text{MOP}}$

    b. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\text{Luas dari } \Delta\text{NOP}}{\text{Luas dari } \Delta\text{MOP}}$

32. Luas OFK $\le$ luas juringADK $\le$ luas OFK + luas FDEK pada gambar berikut,



Tunjukkan bahwa,

$$\cos t \le \frac{t}{\sin t} \le 2 - \cos t$$

Buktikan bahwa,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 0$$

2.3 BENTUK TAK TENTU, KEKONTINUAN DAN ASYMPTOT

Bentuk Tak Tentu

Bentuk taktentu dalam limit biasanya dikaitkan dengan dengan **limit di takhingga dan limit ketakhinggaan.** Konsep ketakhinggaan dalam kalkulus dinyatakan sebagai bilangan real yang sangat besar atau sangat kecil. Bilangan positif yang sangat besar biasa dinyatakan dengan ∞, sedangkan bilangan negatif yang sangat besar(bilangan yang sangat kecil dinyatakan dengan -∞.

Limit di takhingga, dalam konsep limit, menyatakan nilai fungsi apabila x mendekati ∞. Sebagai contoh, misalkan fungsi f(x) = 1/x akan mendekati 0 apabila x menuju atau mendekati ∞. Fungsi f(x) akan mendekati 0 apabila x menuju atau mendekati -∞. Secara umum, dalam limit, bentuk tersebut dinyatakan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Untuk lebih jelas marilah kita lihat dua definisi berikut;

Definisi. (limit x→∞)
Misalkan f terdefinisi pada [c, ∞) untuk beberapa c. Kita katakan $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap ε>0, terdapat bilangan M sedemikian sehingga x>M ⇒ |f(x) – L|<ε

Definisi. (limit x→-∞)
Misalkan f terdefinisi pada (-∞, c] untuk beberapa c. Kita katakan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap ε>0, terdapat bilangan M sedemikian sehingga x<M ⇒ |f(x) – L|<ε

Contoh 1. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Penyelesaian

Ambil ε > 0 sembarang, pilih $M = 1/\varepsilon$ sedemikian sehingga jika $x > M$ maka

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

Bukti definisi yang nomor 2 dapat anda lakukan sendiri tentunya.

Contoh 2. Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

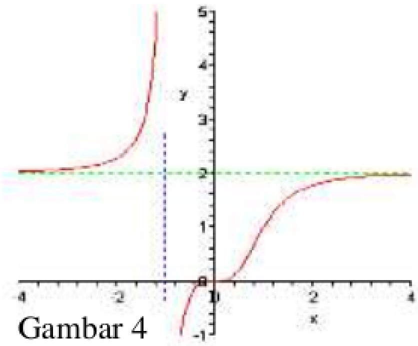
Penyelesaian

Untuk membuktikan ini, kita dapat menggunakan beberapa sifat dari limit. Selain itu juga kita bisa membagi masing-masing bagian dengan pangkat tertingginya, dalam hal ini dengan x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Contoh 3. Tentukan $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$

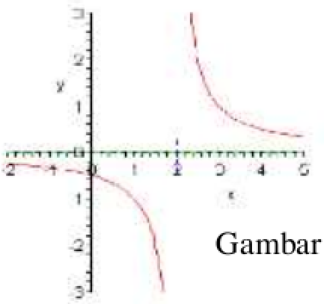
Penyelesaian



Gambar 4

Sebagai bahan untuk menentukan nilai limit, kita bisa lihat dari visualisasi grafiknya di bawah ini.Dengan cara aljabar juga dapat kita lakukan sebagai berikut,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{1+x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{{}^1\!/_{x^2}+1}=\frac{2}{0+1}=2$$



Gambar 5

Limit takhingga. Berdasarkan grafik dari $f(x)=1/(x-2)$, yang mana ditunjukkan pada gambar 5.

Tidak masuk akal untuk $\lim\limits_{x\to 2} 1/(x-2)$, namun kita fikir lebih masuk akal jika ditulis : $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\infty$

Definisi. Limit takhingga

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty$$

jika untuk setiap bilangan positif M terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Hal yang berhubungan dengan definisi adalah,

$\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$		

Contoh 4. tentukan $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x^2-5x+6}$

Penyelesaian

Dengan memfaktorkan penyebutnya, kita peroleh,

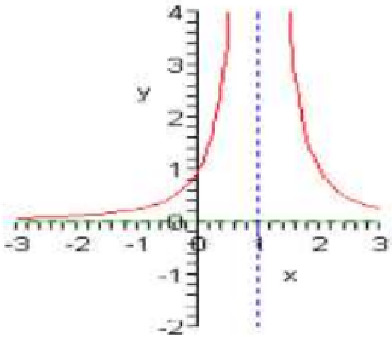
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Untuk $x \to 2^+$ kita lihat bahwa $x + 1 \to 3$, $x - 3 \to -1$, dan $x - 2 \to 0^+$. Jadi, dengan demikian pembilang menuju ke-3 dan penyebutnya menuju 0 dari arah negatif. Untuk itu dapat kita simpulkan bahwa

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$

Contoh 5. tentukan nilai dari

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} \text{ dan } \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$$



Penyelesaian

Grafik dari fungsi $f(x) = 1/(x-1)^2$ dapat ditunjukkan pada gambar 6. Untuk $x \to 1^+$, penyebut menuju 0 dari arah positif, akan tetapi pembilangnya tetap 1 untuk setiap x. Jadi fungsi f(x) dapat bernilai besar sekali apabila x semakin dekat ke-1. Begitu pula untuk $x \to 1^-$, penyebutnya adalah positif dan menuju ke-0. Jadi, fungsi f(x) dapat dibuat sebesar mungkin asalkan x dekat ke-0. Dengan demikian dapat kita tentukan nilai dari $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ dan $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$

Asymptot

Limit di takhingga atau limit ketakhinggan merupakan sebuah konsep penting untuk didiskusikan. Konsep tersebut berkaitan dengan perilaku grafik dari sebuah fungsi. Dalam kajian ini kita akan mendiskusikan tentang dua jenis asymptot,yaitu **asymptot vertical dan asymptot horizontal.**

Asymptot vertical adalah sebuah garis x = c dari grafik y = f(x) jika memenuhi salah satu dari pernyataan berikut;

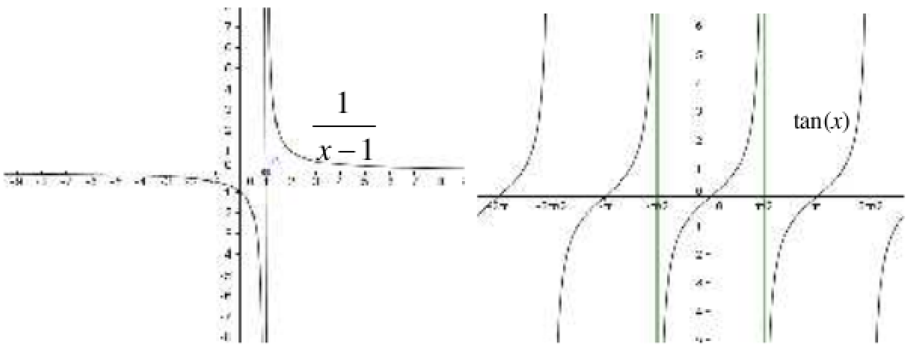
1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$	2. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$	4. $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Jadi, pada gambar 5 garis x = 2 adalah asymptot vertikal, demikian pula pada gambar 6 garis x = 1 adalah asymptot vertikal.

Selanjutnya, **asymptot horizontal** adalah sebuah garis y = b dari grafik y = f(x) jika memenuhi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

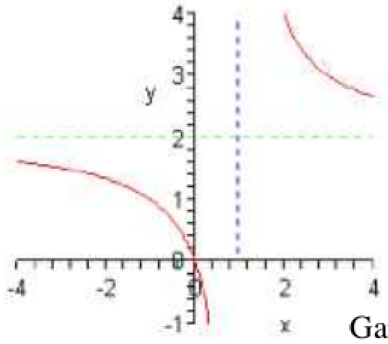
Pada gambar 5 dan gambar 6 garis y = 0 merupakan asymptot horisontal.



Contoh 6. Tentukan asymptot vertikal dan asymptot horisontal dari grafik y = f(x) jika $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

Penyelesaian

Kita bisa katakan bahwa asymptot vertikal terjadi apabila penyebutnya nol dan dalam kasus ini adalah



Gambar 7

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty \text{ dan}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Dengan kata lain,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-1/x} = 2 \text{ dan } \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1-1/x} = 2$$

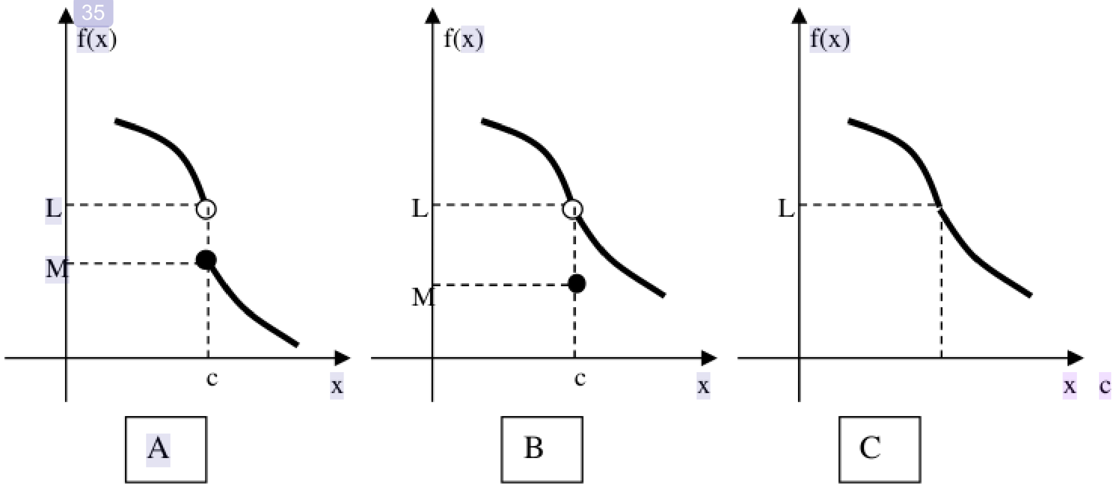
Dan dapat disimpulkan y = 2 adalah asymptot horisontal. Grafik y = 2x/(x – 1) dapat ditunjukkan dengan

Kekontinuan Fungsi

Pada bagian sebelumnya, kita telah mengkaji tentang limit. Limit sebuah fungsi dikatakan ada apabila nilai limit kirinya sama dengan nilai limit kanannya di suatu titik tertentu. Dijelaskan pula mengenai nilai limit fungsi yang berbentuk polinom. Fungsi polinom merupakan sebuah fungsi dimana nilai limit di titik c sama dengan nilai fungsinya, yaitu f(c). Kasus ini kemudian dikembangkan dalam kajian **kekontinuan sebuah fungsi.**

Dalam kalkulus, kekontinuan fungsi dikaji dalam **kekontinuan di sebuah titik dan kekontinuan pada sebuah selang.** Meskipun demikian kekontinuan fungsi tidak ditentukan oleh ada tidaknya nilai limit pada titik tertentu. Akan tetapi, ditentukan oleh grafik dari fungsi tersebut.

Sebelum membahas lebih jauh, marilah kita lihat gambar berikut



Gambar 1

A. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = M$, $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ tidak ada

B $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L, f(c) = M,\ \lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

C $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L, f(c) = L,\ \lim\limits_{x \to c} f(x) = L = f(c)$

Secara formal definisi kekontinuan dapat dilihat pada defínsi berikut,

Definisi. (Kekontinuan pada sebuah titik)
Misalkan f terdefinisi pada interval buka yang memuat c. Kita katakan bahwa f kontinu di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Berdasarkan definisi tersebut, kita memerlukan tiga hal;

(1) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada,

(2) f(c) ada atau c dalam domain f, dan

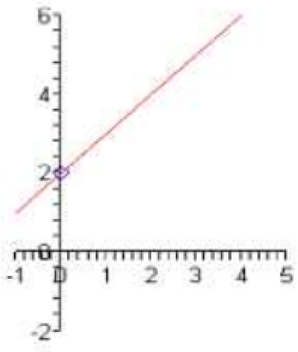
(3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Jika satu dari tiga hal tersebut tidak dipenuhi maka dikatakan f(x) tidak kontinu di x=c.

Contoh 1.

Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$.

Bagaimana f(x) didefinisikan pada x = 2 agar f(x) kontinu di sana?

Penyelesaian



$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Selanjutnya, kita definisikan f(2) = 4. Grfaik dari fungsi yang sudah kita definisikan ulang dapat dilihat pada gambar 2. Bisa kita lihat bahwa f(x) = x + 2 untuk setiap x

Untuk lebih memahami marilah kita lihat beberapa contoh berikut,

Contoh 2

Misalkan sebuah fungsi g(x) didefinisikan

$$g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

Tunjukkan apakah $f(x)$ kontinu di $x=1$

Penyelesaian

Untuk menunjukkan ini, kita harus menunjukkan tiga hal,

(1) $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1$,dan $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-1 = 2.1-1=1$

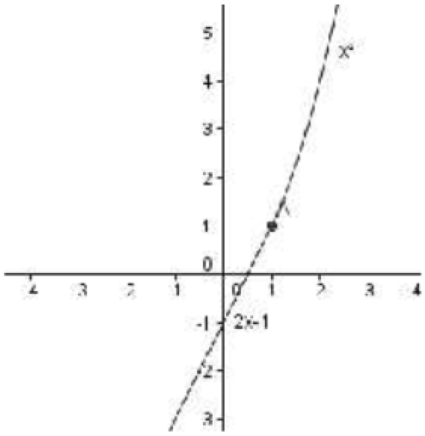
Jadi, dapat disimpulkan $\lim_{x\to 1} g(x)=1$

(2) g(1) = 2.1 – 1 =1

(karena fungsi yang memuat x = 1 adalah 2x – 1)

(3) Karena $\lim_{x\to 1} g(x)=1=g(1)$, maka g(x) kontinu di x = 1.

Sketsa Grafik



Contoh 3

Misalkan sebuah fungsi h(x) didefinisikan

$$h(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le -1 \\ ax+b, & -1<x\le 2 \\ x^2-2 & x>2 \end{cases}$$

Tentukan nilai *a* dan *b* agar h(x) kontinu di mana-mana

Penyelesaian

Dalam menyelesaikan ini, kita mesti ingat kembali persyaratan yang ada.

$$\lim_{x\to -1^-} h(x)=\lim_{x\to -1^-}(x^2+1)=(-1)^2+1=2$$

$$\lim_{x\to -1^+} h(x)=\lim_{x\to -1^+}(ax+b)=-a+b$$

Agar $\lim_{x\to -1} h(x)$ ada, maka limit kiri harus sama dengan limit kanan.

Sehingga kita dapatkan 2 = -*a* + *b*

Disamping itu, $h(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

Syarat kontinu di *x* = -1 adalah $\lim_{x\to -1} h(x)=h(-1)$. Dengan demikian kita peroleh

-*a* + *b* = 2 ....(1)

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax+b) = 2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-2) = 2^2-2=2$$

Agar $\lim_{x\to 2} h(x)$ ada, maka limit kiri harus sama dengan limit kanan.

Sehingga kita dapatkan $2 = 2a + b$

Disamping itu, $h(2) = 2^2 - 2 = 2$

Syarat kontinu dititik $x = 2$ adalah $\lim_{x\to 2} h(x) = h(2)$. Dengan demikian kita peroleh

$2a + b = 2$ ....(2)

Dengan menyelesaikan (1) dan (2)

$-a + b = 2$

$\underline{2a + b = 2 \quad -}$

$-3a = 0$ atau $a = 0$

Dengan memasukkan nilai a = 0 ke dalam salah satu persamaan, akan kita dapatkan

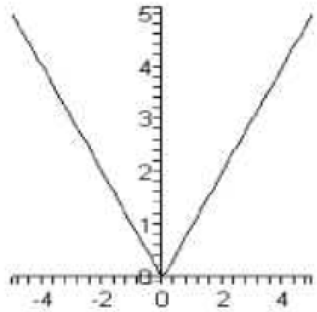
$0 + b = 2$ atau $b = 2$.

Jadi, fungsi $h(x)$ akan kontinu di mana-mana jika $a = 0$ dan $b = 2$

Berbagai fungsi yang dibahas dalam tulisan ini adalah fungsi yang kontinu di semua titik atau kekontinuan dimanapun kecuali di beberapa titik. Beberapa teorema berikut akan membantu Anda dalam memahami kekontinuan sebuah fungsi.

Teorema A. (kekontinuan fungsi polinom dan fungsi rasional)
Sebuah fungsi polinom adalah kontinu pada setiap bilangan real c. Sebuah fungsi rasional kontinu pada setiap bilangan real di domainnya. Hal ini menunjukkan kekecualian pada penyebut yang bernilai 0.

Secara umum, fungsi polinom berbentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \ldots + a_nx^n$, sehingga sangatlah mudah dipahami bahwa fungsi polinom kontinu di setiap bilangan real. Di samping itu, fungsi polinom memiliki domain untuk setiap bilangan real.



Ingat kembali fungsi harga mutlak $f(x) = |x|$. Untuk $x < 0$, $f(x) = -x$ adalah sebuah polinom; sedangkan untuk $x > 0$, $f(x) = x$ adalah sebuah polinom. Jadi,$|x|$ kontinudi setiap titik yang bukan 0. Akan tetapi, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |x|$

Jadi, $f(x) = |x|$ kontinu di setiap bilangan real. Hal ini dapat dilihat sesuai dengan grafik disamping ini.

Teorema B (Kekontinuan fungsi nilai mutlak dan akar ke-n)
Fungsi Nilai Mutlak adalah kontinu pada setiap bilangan real *c*. Jika n ganjil, fungsi akar ke-n adalah kontinu untuk setiap bilangan real c. Jika n genap, fungsi akar ke-n kontinu pada setiap bilangan real positif c.

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} x} = \sqrt[n]{c}$$

Teorema C
Jika f dan g kontinu di c, maka $k.f, f+g, f-g, f.g, f/g$ (asalkan $g \neq 0$), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$) juga kontinu.

Bukti
Kita dapat membuktikannya dengan menggunakan teorema tentang limit. Sebagai contoh kita buktikan untuk $f.g$ dimana

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x) = f(c).g(c)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $f.g$ kontinu di c.

Apa yang telah kita kaji berkaitan dengan kekontinuan fungsi pada sebuah titik atau beberapa titik tertentu. Bagaimana dengan kekontinuan fungsi pada sebuah interval atau selang tertentu? Dalam kasus ini, kita bisa memandang pengertian dari interval itu sendiri. Interval adalah kumpulan dari titik-titik.

Biasanya kita mengenal interval buka dan tutup. Misalkan saja interval buka (a,b) adalah sebuah kumpulan titik-titik yang terletak di antara a dan b (b > a). Bayangkan oleh Anda, sebuah fungsi yang kontinu pada setiap titik di antara a dan b. Menurut Anda apakah fungsi tersebut dikatakan kontinu pada interval (a,b)? Ya, tepat sekali. Hal senada juga dapat kita gunakan pada selang tertutup [a,b], yang mana kumpulan titik dari a sampai dengan b.

Perhatikan definisi berikut ini,

Definisi Kontinu pada interval

Fungsi f **kontinu kanan** di a apabila

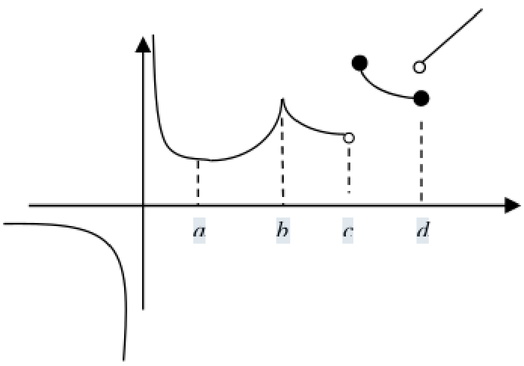
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Dan **kontinu kiri** di b, apabila

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

F kontinu pada selang (a,b) jika f kontinu pada setiap titik di antara a dan b. Fungsi f kontinu pada selang $[a,b]$ jika f kontinu pada setiap titik mulai dari a sampai dengan b.

Sebagai contoh, $f(x) = 2/x$ kontinu pada (0,1) dan $g(x) = \sqrt{(3x)}$ kontinu pada [0,1]



Gambar disamping menunjukkan bahwa $f(x)$ kontinu pada $(-\infty, 0)$, $(0,c)$, $[c,d]$, dan (d,∞).

SOAL LATIHAN

Soal Latihan
Tentukan nilai limit berikut ini

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{3-x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{3-2x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3}{(3-x)(x-1)}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3}{(3-x)(x-1)}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x}{(3-2x)(x-1)}$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{(3-x)(x-1)}+x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{(3x+x^2)}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+3)-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

11. $\lim\limits_{x\to2+} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$, dimana $a_0, b_0 \neq 0$, n asli

13. $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{x}{x-4}$

14. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2}{9-x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2}{9-x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

17. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

18. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

19. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{|x|}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

Tentukan asymptot vertikal dan horizontal dari fungsi berikut, dan buatlah sketsa grafiknya

21. $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$

22. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$

23. $f(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$

24. $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3x + 2}$

25. $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 2}}$

26. $g(x) = \dfrac{3x + 2}{3x^2 - x - 2}$

27. Garis $y = ax + b$ dinamakan ***asymptot oblique*** terhadap grafik $y = f(x)$, apabila $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ atau $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$. Tentukan ***oblique asymptot*** dari

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^2 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

28. Teori relativitas Einstein menunjukkan bahwa $m(v)$ dari benda yang bergerak dengan kecepatan v didefinisikan dengan,

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Dimana m_0 masa benda diam dan c kecepatan cahaya. Apa yang terjadi pada $\lim_{v \to c^-} m(v)$?

Nyatakan fungsi berikut apakah kontinu di 2. Jelaskan jawaban Anda

29. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

30. $h(x) = \dfrac{3}{x - 2}$

31. $h(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

32. $f(t) = \dfrac{t - 2}{t^2 - 4}$

33. $h(x) = \sqrt{x - 2}$

34. $r(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & x \neq 2 \\ 12 & x = 2 \end{cases}$

35. $r(t) = \begin{cases} t - 2 & x < 2 \\ 2 - t & x \geq 2 \end{cases}$

36. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & x > 2 \end{cases}$

37. Apakah fungsi f berikut kontinu pada semua titik di real?Jelaskan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

38. Sketsalah sebuah grafik fungsi f yang memenuhi kondisi berikut
   (a) Domain [-2,2]
   (b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$
   (c) tidak kontinu di -1 dan 1
   (d) Kontinu kanan di -1 dan kontinu kiri di 1

39. Buktikan bahwa f kontinu di c jika dan hanya jika $\lim_{t \to 0} f(t+c) = f(c)$.

40. Tentukan nilai a dan b agar f kontinu di setiap x real

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ ax+b & 1 \le x < 2 \\ 3x & x \ge 2 \end{cases}$$

BAB III
TURUNAN

Turunan (*differentiation*) merupakan sebuah konsep yang sangat penting dalam kalkulus. Pada bagian ini, kita akan mengkaji bagaimana menentukan nilai sebuah turunan pada titik tertentu, cara menentukan turunan dan aturan pencarian fungsi turunan.

Berbagai jenis fungsi akan dikaji termasuk grafik dan bagaimana menggambar grafik dari sebuah fungsi.

Turunan merupakan perbandingan perubahan antara nilai fungsi denganperubahan nilai variabelnya.

Berbagai topic berkaitan erat dengan turunan. Penentuan garis singgung, kecepatan benda, pertumbuhan populasi merupakan berbagai permasalahan yang dapat diselesaikan dengan turunan.

Pada bagian ini, kita akan mengkaji tentang: pendekatan turunan, aturan-aturan dalam pencarian turuan serta keterkaitan dengan topic lain baik dalam matematika ataupun di luar matematika.

3.1 Pendekatan turunan melalui limit

3.2 Aturan Dasar Turunan

3.3 Aturan Perkalian, Pembagian, Pangkat Rasional, tingkat tinggi

3.4 Aturan Rantai Pangkat diperumum, dan Implisit

3.1 PENDEKATAN DAN DEFINISI TURUNAN

Pendekatan definisi turunan melalui limit

Kalkulus berkembang atas empat kajian yang dilakukan di Eropa, yaitu 1) permasalahan garis singgung, 2) kecepatan dan percepatan, 3) masalah minimum dan maksimum, dan 4) permasaahan luas daerah. Keempat kajian tersebut melibatkan notasi dan konsep tentang limit. Kalkulus dapat digunakan untuk menyelesaikan keempat permasalahan tersebut.

ISAAC NEWTON (1642–1727)

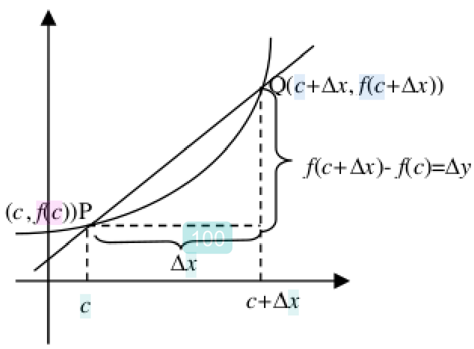
Pendekatan garis singgung merupakan satu konsep yang baik untuk mendekati konsep tentang turunan. Garis singgung merupakan konsep dalam matematika yang sudah di pelajari pada SMA.

Garis singgung merupakan garis yang menyentuh kurva tepat di satu titik, garis yang tegak lurus dengan jari-jari (pada lingkaran). Pengertian-pengertian itulah yang diterima pada saat di sekolah. Benarkah demikian?..cobalah perhatikan gambar-gambar berikut;

Ketiga gambar di atas menunjukkan bahwa garis singgung memungkinka juga memotong kurva pada titik lainnya.

Pendekatan Garis Singgung

Pada dasarnya, penentuan persamaan garis singgung pada titik P ditentukan oleh konsep gradien/*slope* (kemiringan) dari garis singgung pada titik P tersebut.



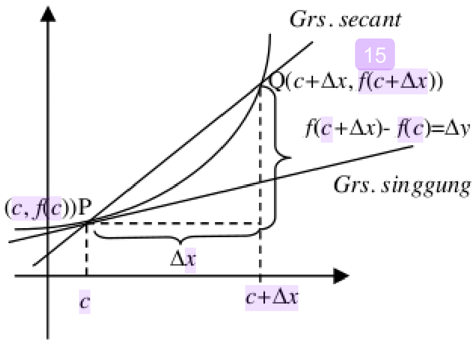
Kita bisa dekati kemiringan garis singgung pada titik P dengan menggunakan garis *secant* (garis yang memotong kurva pada dua titik). Misalkan titik P (c, f(c)) adalah titik singgung pada kurva dan Q(c+Δx, f(c+Δx)) adalah titik kedua pada kurva.

Kemiringan garis secant dapat ditentukan dimana,

$$m_{\sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} \qquad \frac{\text{perubahan di } y}{\text{perubahan di } x}$$

$$= \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

secant akan mendekati garis tangent (garis singgung), dimana $m_{sec} \rightarrow m_{tan}$. Perhatikan gambar berikut;



Pada konsep tentang limit, kita bisa gunakan bahwa,

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Dimana $m_{\tan}$ berarti gradient garis singgung kurva pada titik $(c, f(c))$.

Kemiringan garis singgung pada titik P selanjutnya disebut juga sebagai **kemiringan kurva** $f(x)$ pada titik $P(c, f(c))$.

Contoh 1

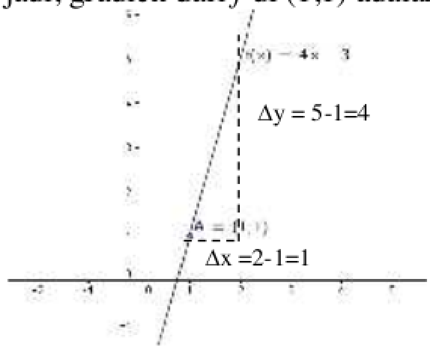
Tentukanlah kemiringan kurva $f(x) = 4x - 3$, pada titik (1,1)

Penyelesaian

Untuk menentukan kemiringan kurva, kita dapat menggunakan definisi untuk titik (1,1) pada kurva $f(x) = 4x - 3$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4(1+\Delta x) - 3) - (4.1 - 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4.\Delta x + 1 - 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4.\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4$$
$$= 4$$

jadi, gradien dari f di (1,1) adalah m = 4.



Gambar disamping menunjukkan bahwa gradien fungsi linier $f(x) = 4x - 3$ akan sama dengan 4 pada setiap titik pada garis terbut.

Secara umum, kemiringan kurva linier akan sama dengan besar gradien garisnya. (**Diskusikan**)

Contoh 2

Tentukanlah kemiringan garis singgung pada kurva $f(x) = x^2 + 2$ pada titik (-1, 3) dan (0, 2)

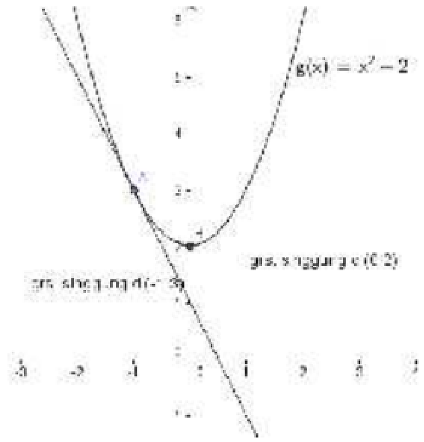
Penyelesaian

Dalam hal ini kita bisa misalkan titik (c, $f(c)$) yang terletak pada kurva untuk sembarang c. Sehingga kemiringan garis singgung pada titik (c, $f(c)$) adalah

$$m_{\tan}(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((c+\Delta x)^2 + 2 - (c^2 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c^2 + 2.\Delta x.c + \Delta x^2 + 2 - c^2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.c\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2.c + \Delta x)$$

$$= 2.c$$



Jadi kemiringan kurva pada titik (c, $f(c)$) adalah $m = 2c$, sehingga

c	m=2.c
-1	-2
0	0

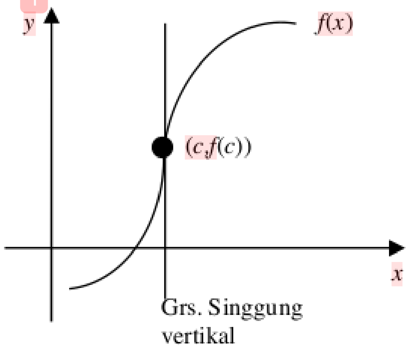
Secara visualisasi kemiringan garis pada kedua titik tersebut dapat dilihat pada gambar disamping.

Pengertian garis singgung pada kurva belumlah memuat tentang garis singgung vertikal. Pada kasus ini, kita bisa menggunakan definisi berikut ini.

Jika $f(x)$ kontinu pada titik c, maka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty \qquad \text{atau} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

Perhatikan grafik kurva berikut ini,



Garis vertical $x = c$, melalui titik $(c,f(c))$ adalah garis singgung vertical pada kurva $f(x)$ di titik c.

Pendekatan Kecepatan Sesaat

Perhatikan sebuah benda yang sehingga posisinya pada saat t dinyatakan dengan $s(t) = 2t^2 + 20t + 5$ meter. Kecepatan rata-rata dari t_1 sampai ke t_2 dinyatakan dengan,

$$v(t_1, t_2) = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Perhatikan tabel berikut ini;

t	0	1	2	3	4
S(t)	5	27	53	83	117
v(2,t)	24	26	?	30	32

Tabel di atas menunjukkan t waktu, $s(t)$ posisi pada saat t, dan v(2,t) menunjukkan kecepatan rata-rata dari t ke 2 atau dari 2 ke t. Apa yang terjadi pada saat v(2,2) ? tentu kita tidak bisa menghitung secara langsung kecepatan yang dimaksud. Hal ini dikarenakan akan terjadi pembagian dengan 0.

Marilah kita amati apa yang terjadi disekitar $t = 2$, perubahan kecepatan rata-rata untuk t yang semakin mendekati 2 bisa kita amatiseperti nampak pada tabel berikut;

t	s(t)	v(2,t)
1,9	50,22	27,8
1,99	52,7202	27,98
1,999	52,972002	27,998
1,9999	52,99720002	27,9998
1,99999	52,99972	27,99998
2	**53**	**#DIV/0!**
2,00001	53,00028	28,00002
2,0001	53,00280002	28,0002
2,001	53,028002	28,002
2,01	53,2802	28,02
2,1	55,82	28,2

Amati nilai-nilai pada kolom terakhir pada tabel disamping ? semakin mendekati 2 maka kecepatan rata-ratanya semakin mendekati 28. Lalu, apa artinya v(2,2)? kecepatan rata-rata ini kenal dengan nama kecepatan sesaat pada t = 2

Fakta di atas membantu kita untuk memahami penggunaan konsep limit pada kecepatan rata-rata.

misalkan $t_1 = t$ dan $t_2 = t + h$ sehingga kecepatan rata-rata dapat dinyatakan dengan,

$$v_{t1,t2} = \frac{s\ t_2\ - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s\ t + h\ - s(t)}{(t + h) - t} = \frac{s\ t + h\ - s(t)}{h}$$

konsep limit membantu apabila selisih waktu semakin kecil (mendekati 0) yang biasa dinyatakan dengan h→0.

sehingga **kecepatan sesaat** pada saat *t* dapat dinyatakan dengan

$$v\ t\ = \lim_{h \to 0} \frac{s\ t + h\ - s(t)}{h}$$

Contoh 3

Posisi benda pada saat t dinyatakan dengan $s(t) = ½\ t^2 + 10\ t + 6$ meter. Tentukanlah kecepatan benda pada saat

a. t = 2, 4, 5, 7, 8 detik
b. Apa yang bisa disimpulkan dari a)

Jawab

untuk menjawab ini, kita bisa cari secara umum kecepatan sesaat pada saat t denga cara berikut;

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(t+h)^2 + 10(t+h) + 6 - \left(\frac{1}{2}t^2 + 10t + 6\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2 + th + \frac{1}{2}h^2 + 10t + 10h + 6 - \frac{1}{2}t^2 - 10t - 6}{h}$$

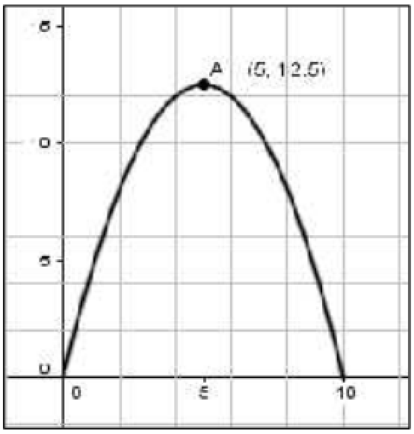
$$= \lim_{h\to 0}\frac{th + \frac{1}{2}h^2 + 10h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(t + \frac{1}{2}h + 10\right) = t + 10$$

a) sehingga kecepatan pada saat t = 2, 4, 5, 7, 8 detik, dapat dilihat pada tabel berikut;

t	2	4	5	7	8
v(t)	12	14	15	17	18

b) benda semakin bertambah cepat dengan kecepatan awal 10 m/dt.

Contoh 4
Sebuah batu dilempar keatas sehingga posisinya pada saat t seperti tampak pada grafik berikut;



a. bagaimana kecepatannya sebelum t = 5
b. bagaimana kecepatannya pada saat t = 5
c. bagaimana kecepatananya setelah t = 5
d. apa yang terjadi setelah 10 detik?

Jawab
Pertama kita mencari persamaan posisi batu pada saat t. Pencarian

persamaan dapat kita tentukan melalui tiga titik yang diketahui atau dengan persamaan simetri dan titik puncak.

tiga titik yang diketahui adalah (0,0). (5,12.5), dan (10,0) dengan bentuk umum $s(t) = at^2 + bt + c$, sehingga

(0,0), maka $0 = a.0^2 + b.0 + c$ sehingga $c = 0$.....1)

(5,12.5), maka $12{,}5 = 25a + 5b$..........................2)

(10,0), maka $0 = 100\,a + 10b$..............................3)

dengan menyelesaikan 2) dan 3) diperoleh

$$a = -\tfrac{1}{2} \text{ dan } b = 5.$$

substitusi ke bentuk umum diperoleh

$$s(t) = 5t - \tfrac{1}{2}t^2$$

titik puncak (5,12.5), maka persamaannya $s(t) = a\,(t - 5)^2 + 12{,}5$

subtitusi titik (0,0) sehingga

$$0 = a(0 - 5)^2 + 12{,}5 \Rightarrow 0 = 25a + 12{,}5, \text{ jadi, } a = -\tfrac{1}{2}\,.$$

sehingga persamaannya menjadi

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}\,(t - 5)^2 + 12{,}5$$

atau

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}\,t^2 + 5t$$

dengan menggunakan konsep limit, kita dapatkan'

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(t+h)^2 + 5(t+h) + \frac{1}{2}t^2 - 5t}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2 - th - \frac{1}{2}h^2 + 5t + 5h + \frac{1}{2}t^2 - 5t}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-th + 5h - \frac{1}{2}h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-t + 5 - \frac{1}{2}h\right)$$

$$= -t + 5$$

a. untuk $0 < t < 5$, maka $v(t) = -t + 5 > 0$ yang berarti batu bergerak keatas
b. untuk $t = 5$, maka $v(t) = -5 + 5 = 0$ yang berarti batu berhenti
c. untuk $t > 5$, maka $v(t) = -t + 5 < 0$ yang berarti batu bergerak kebawah.

Dua pendekatan, pendekatan garis singgung dan kecepatan sesaat, akan membantu kita memahami tentang konsep turunan. Konsep ini sangat membantu untuk memahami kajian kita selanjutnya dalam mengkaji Kalkulus.

Definisi Turunan

Sekarang kita sudah memiliki bahan yang cukup untuk mengkaji sebuah konsep yang sangat penting dalam kalkulus. Konsep limit terhadap garis singgung digunakan untuk mendefinisikan **turunan (differentiation).**

Definisi: Turunan pada sebuah titik.

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval $[a, b]$ dan $c \in [a, b]$, maka

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Adalah nilai turunan f(x) pada titik c apabila nilai limitnya ada dan tidak sama dengan ∞ atau $-\infty$.

Contoh 5

Tentukan turunan fungsi $f(x) = mx + n$ pada titik -2, 0, 1, 5

Penyelesaian

Berdasarkan definisi tentang turunan pada sebuah titik c adalah

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(c+\Delta x) + n - (m(c)+n)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{mc + m\Delta x + n - mc - mn}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} m = m$$

Jadi, turunan dari $f(x) = mx + n$ pada titik c adalah $f'(c) = m$, sehingga turunan pada titik-titik yg dimaksud adalah $f'(-2) = f'(0) = f'(1) = f'(5) = m$.

Contoh 6

Tentukan turunan dari $f(x) = x^3 + 2x - 5$ pada titik 0 dan 2 ?

Penyelesaian

Untuk mencari turunan fungsi pada titik 0, maka

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 + 2.\Delta x - 5 - (-5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 + 2.\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} ((\Delta x)^2 + 2)$$

$$= 2$$

Dengan cara yang sama kita gunakan untuk mencari turunan di titik 2

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 + 2(2+\Delta x) - 5 - (2^3 + 2.2 - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12.\Delta x + 6.(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4 + 2.\Delta x - 5 - (8 + 4 - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12.\Delta x + 6.(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2.\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 6.\Delta x + (\Delta x)^2 + 2)$$

$$= 14$$

Contoh 7

Tentukan turunan dari $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pada titik -2 dan 2 ?

Penyelesaian
Turunan pada -2

$$f'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{-2+\Delta x}-\frac{1}{-2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-2-(-2+\Delta x)}{-2(-2+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2+2-\Delta x}{(4-2.\Delta x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{(4-2.\Delta x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(4-2.\Delta x)}$$

$$=\frac{-1}{4}$$

Turunan pada 2

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2-(2+\Delta x)}{2(2+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2-2-\Delta x}{(4+2.\Delta x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{(4+2.\Delta x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(4-2.\Delta x)}$$

$$=\frac{-1}{4}$$

Selain itu, kita dapat menyusun kembali definisi dengan memisalkan $(c+\Delta x)=x$ sehingga kita peroleh jika $\Delta x\to 0$, maka $x\to c$. Oleh karena itu, definisi

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

dapat dituliskan menjadi

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Sekarang kita gunakan definisi baru untuk menentukan nilai turunan dari fungsi diatas,

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}$$

$$=\frac{-1}{4}$$

Hasil ini sama dengan hasil dari turunan dengan menggunakan definisi sebelumnya.

Karena c adalah bilangan sembarang yang berada pada selang dimana fungsi f(x) terdefinisi, maka simbol c dapat diganti menjadi x. Dengan demikian, definisi

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

dapat ditulis ulang menjadi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Rumusan yang baru merupakan definisi turunan dari sebuah fungsi. Sebagian besar $f'(x)$ berbentuk sebagai fungsi dari x. Tidaklah berlebihan untuk mengatakan bahwa hasil turunan pada sembarang titik x adalah sebuah fungsi dari x itu sendiri.

Definisi : Turunan dari sebuah fungsi

Turunan fungsi f pada titik x didefinisikan dengan

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Asalkan limitnya ada. Apabila untuk semua x limitnya ada, maka f' dinamakan fungsi dari

Dalam beberapa buku kalkulus yang lain, definisi turunan dinyatakan dengan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tentunya ini merupakan definisi yang sama dengan mensubsitusi notasi atau simbol Δx dengan h.

Sebagaimana pendekatan awal dari turunan yang didasarkan pada kemiringan garis. Fungsi hasil turunan f' merupakan fungsi garis singgung pada kurva $f(x)$ pada titik $(x, f(x))$.

Beberapa notasi banyak digunakan untuk turunan dari $y = f(x)$. Notasi-notasi tersebut antara lain,

$$f'(x);\ \frac{dy}{dx};\ y';\ \frac{d}{dx}f(x);\ D_x[y]$$

Agar lebih memahami turunan fungsi mari kita pelajari beberapa contoh berikut ini.

Contoh 8

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2 + x + 1$

Penyelesaian

Berdasarkan definisi, maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+1)$$

$$= 2x+1$$

Jadi, turunan dari $f(x) = x^2 + x + 1$ adalah $f'(x) = 2x + 1$

Contoh 9

Tentukan turunan dari $y = \sqrt{x}$

Penyelesaian

Berdasarkan definisi dan notasi maka turunannya dapat kita tulis dengan

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Dengan melakukan manipulasi aljabar untuk menentukan limit, maka

Jadi, turunan dari $f(x) = \sqrt{x}$ adalah $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Contoh 10

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = \frac{1}{2x}$ pada titik (-1, - ½) dan titik (1, ½)

Penyelesaian

Persamaan garis singgung pada kurva dapat ditentukan melalui persamaan, $y - y_1 = m(x - x_1)$ karena salah satu titiknya diketahui.

Oleh karena itu, kita perlu menentukan gradien m dari garis singgung tersebut. Nilai turunan pada sebuah titik pada kurva merupakan gradiennya. Sehingga

$$m(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{-2}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\frac{-2-2x}{-4x}}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{-2(1 + x)}{-4x(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Jadi, m = - ½, sehingga

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow$$

$$y - (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}(x + 1)$$

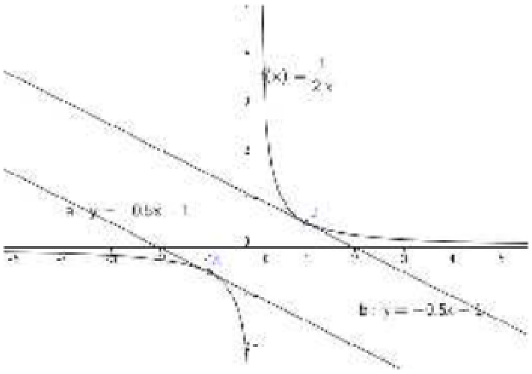
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$$

Jadi persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = \frac{1}{2x}$ di titik (-1, -½)

Adalah y = - ½ x – 1

Dengan cara yang sama cobalah mencari persamaan garis singgung pada titik (1, ½).

Grafik dari permasalahan tersebut dapat dilihat sebagai berikut,



Contoh 11

Dua buah mobil, A dan B, bergerak sehingga posisinya pada saat t (dalam jam) masing-masing dinyatakan oleh, $s_A(t) = 50t + 10t^2$ dan $s_B(t) = 20 + 50t + 5t^2$, yang dinyatakan dalam kilometer.

a) Bagaimana posisi awal keduanya ? jelaskan
b) Bagaimana kecepatan awal kedua mobil tersebut? jelaskan
c) Apakah kedua mobil tersebut bisa bertemu? jelaskan
d) sketsalah grafik posisi dari kedua mobil tersebut?

Penyelesaian

a) posisi awal mobil dapat ditunjukkan pada saat $t = 0$. substitusikan pada kedua posisi mobil, sehingga diperoleh

$$s_A(0) = 50(0) + 10(0)^2 = 0$$

$$s_B(0) = 10 + 50(0) + 5(0)^2 = 10$$

Hasil menunjukkan bahwa mobil B berada 10 km didepan mobil A, dan mobil A berada pada posisi awal atau dihitung sebagai titik awal.

b) Kecepatan awal dapat dinyatakan dengan $v(0) = s'(0)$ sehingga kedua mobil memiliki kecepatan awal sebagai berikut;

$$v_A(0) = s_A{}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{s_A(0+h) - s(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{50(0+h) + 10(0+h)^2 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{50h + 10h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (50 + 10h)$$

$$= 50 .$$

Jadi, kecepatan awal mobil A adalah 50 km/jam.

Dengan cara yang sama, untuk mobil B diperoleh

$$v_B(0) = s_B'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{s_B(0+h) - s(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20 + 50(0+h) + 5(0+h)^2 - 10}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{50h + 5h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (50 + 5h)$$

$$= 50 .$$

Jadi, kecepatan awal mobil B adalah 50 km/jam.

Hal ini menunjukkan bahwa kedua mobil memiliki kecepatan awal yang sama, yaitu 50 km/jam.

c) Kedua mobil akan bertemu apabila $s_A(t) = s_B(t)$, dimana

$$s_A(t) = s_B(t)$$

$$50t + 10t^2 = 20 + 50t + 5t^2$$

$$10t^2 - 5t^2 = 20$$

$$5t^2 = 20 \text{ atau } t^2 = 4$$

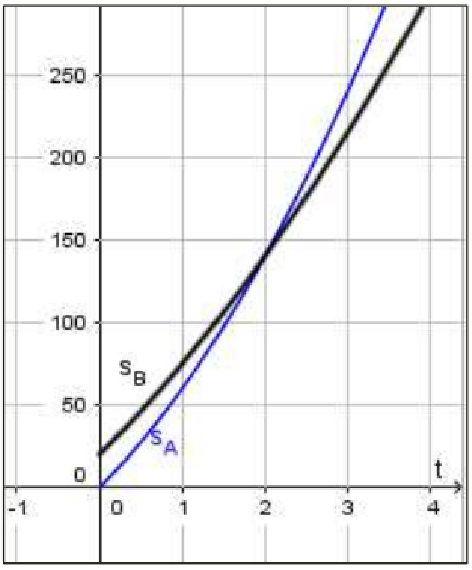
persamaan terakhir akan dipenuhi untuk t = -2 atau t = 2. Karena t berkaitan dengan waktu sehingga pilih t = 2.

Jadi, kedua mobil bertemu setelah keduanya bergerak selama 2 jam atau pada posisi,

$s_A = 50(2) + 10(2)^2 = 100 + 40 = 140\ km$ dan

$s_B = 20 + 50(2) + 5(2)^2 = 20 + 100 + 20 = 140\ km$.

d) Grafik posisi dari kedua mobil dapat dilihat berikut;



dari gambar dapat dilihat bahwa mobil A bergerak dari posisi titik awal, sedangkan mobil B berada didepannya sejauh 20 km (lihat persamaan). Akan tetapi, mobil A dan B bertemu pada t = 2 (perhatikan titik potong kedua grafiknya). Mobil A pada awalnya (sebelum t = 2) berada dibelakang mobil B, yang ditunjukkan oleh grafik posisinya berada dibawah grafik posisi dari mobil B. Sebaliknya, setelah t > 2 mobil A berada didepan mobil B yang ditunjukkan oleh grafik posisinya berada diatas mobil B.

Hubungan Turunan dan Kekontinuan

Pencarian turunan *f'* pada kurva *f* dititik *c* bisa juga menggunakan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Tentu saja asalkan limitnya ada. Nilai limit dikatakan ada apabila nilai limit kiri dan kanan, ada dan sama. Limit kanan dan limit kiri masing-masing dituliskan dengan,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ dan } \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Makna lainnya adalah bahwa limit kanan apabila ada menunjukkan bahwa turunan fungsi dari kanan, sedangkan limit kiri apabila ada menunjukkan bahwa turunan dari kiri ada.

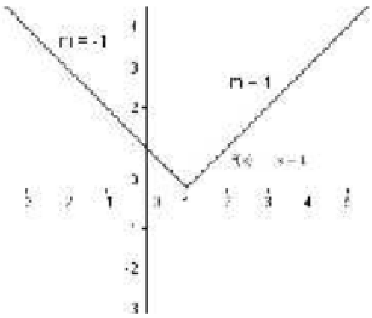
Akibat

Jika f terdefferensialkan pada (a, b) dan terdefferensialkan dari kanan a dan kiri b, maka f terdefferensialkan pada $[a, b]$.

Untuk lebih memahami tentang terdefferensial dan kekontinuan kita akan mengkaji beberapa contoh berikut.

Contoh 12 (fungsi mutlak)

Perhatikan fungsi mutlak $f(x) = |x - 1|$ dengan grafiknya berikut ini bahwa fungsi $f(x) = |x - 1|$ kontinu pada 1. Akan tetapi, limit kiri



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Sedangkan untuk limit kirinya (lihat disamping). Karena nilai limit kanan dan limit kiri tidak sama, maka nilai dari,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

tidak ada.

Jadi, $f(x) = |x - 1|$ tidak memiliki turunan di $x = 1$.

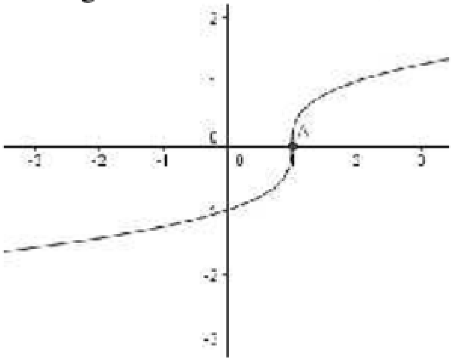
Contoh 13

Tentukan turunan dari $f(x) = (x-1)^{1/3}$ di $x = 1$?

Penyelesaian

fungsi tersebut merupakan fungsi yang kontinu pada x = 1.

Sedangkan nilai limit adalah,



$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/3}-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/3}}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^{2/3}}-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$$
$$=\infty$$

Dengan demikian fungsi f(x) tidak memiliki turunan di titik $x = 1$.

Teorema berikut akan membantu kita menentukan hubungan antara terdeffernsialkan dengan kekontinuan.

Teorema (Kekontinuan dan Terdefferensialkan)
Jika $f(x)$ memiliki turunan pada titik c, maka $f(x)$ kontinu di c

Bukti

Fungsi f(x) dikatakan kontinu di c, apabila $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Dengan kata lain cukup ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c}\big(f(x)-f(c)\big)=0$

Perhatikan,

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-f(c)\big)=\lim_{x\to c}\left((x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)=\lim_{x\to c}(x-c).\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)$$
$$=0.f'(x)$$
$$=0$$

Jadi, kita peroleh $\lim_{x\to c}\big(f(x)-f(c)\big)=0$. Hal ini menunjukkan bahwa apabila $f(x)$ memiliki turunan di c, maka f kontinu di c.

Bagaimana dengan sebaliknya, jika $f(x)$ kontinu di c, maka $f(x)$ memiliki turunan di c?

SOAL LATIHAN

Tentukanlah kemiringan garis singgung pada kurva dan titik yang diberikan berikut;

1. $f(x) = 4 - 5x$, (1,-1)
2. $g(x) = x^2 - 5x + 6$, (3,0)
3. $f(t) = 2t^2 + 3$, (0,3)
4. $h(x) = \sqrt{x-2}$, (3,1)
5. $s(t) = t^3 + t$, (-1,-2)

Tentukan turunan dari fungsi yang diberikan berikut ini

6. $f(x) = k, k$ konstan
7. $f(x) = -5x + 4$
8. $h(x) = 2x^2 - 1$
9. $f(t) = 4 - 3t^2$
10. $g(x) = x^2 + x$
11. $g(t) = t^3 - t^2$
12. $h(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$
    dengan a, v_0 konstanta
13. $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$
14. $h(x) = \dfrac{-1}{4-x^2}$
15. $g(x) = \sqrt{2x+1}$
16. $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva di titik yang diberikan berikut ini

17. $g(x) = x^2 - 2$, (2, 2)
18. $f(x) = x^2 + 4x + 3$,
    (-2, -1)
19. $g(x) = x^3 - 2$, (1, -1)
20. $f(t) = \sqrt{t+2}$, (2,2)
21. $h(x) = x - \dfrac{2}{x}$, (1, -1)

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva *f* dan sejajar dengan garis yang diberikan

22. $f(x) = x^3$, $3x - y + 1 = 0$
23. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x + 2y - 6 = 0$

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva f dan tegak lurus dengan garis yang diberikan

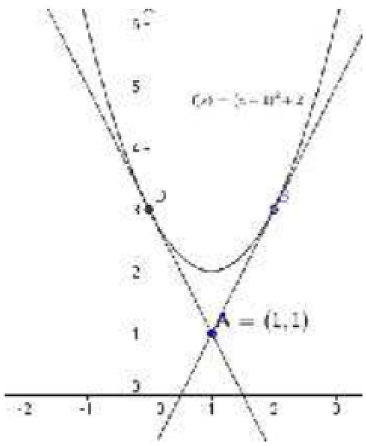
24. $f(x) = x^3$, $\quad 3x - y + 1 = 0$
25.
26. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad x + 2y - 6 = 0$
27. Persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik (2, 4) melalui titik (-1, 2). Tentukanlah nilai dari $f(2)$ dan $f'(2)$?
28. Persamaan garis singgung pada kurva $y = g(x)$ di titik (-1, 3) sejajar dengan garis $x - 2y + 4 = 0$. Tentukanlah nilai dari $g(-1)$ dan $g'(-1)$?

Identifikasi sebuah fungsi yang memiliki karakteristik berikut. Kemudian sketsalah fungsinya

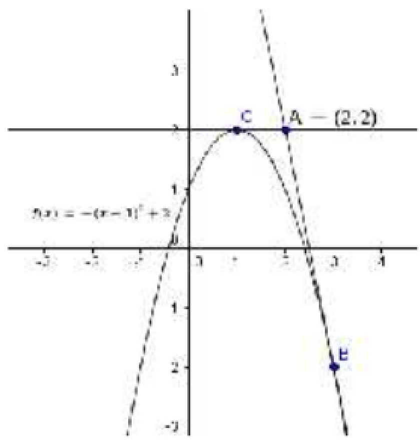
29. $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$, $-\infty < x < \infty$
30. $f(0) = 4$, $f'(0) = 0, f'(x) < 0$ untuk $x < 0, f'(x) > 0$ untuk $x > 0$

Tentukanlah persamaan gari singgung dari grafik dan titik yang diberikan

31. $f(x) = (x-1)^2 + 2$



32. $f(x) = -(x-1)^2 + 2$



Tentukan turunan dari fungsi berikut di titik c yang diberikan

33. $f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}}, c = -2$

34. $g(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}, c = 1$

35. $f(x) = |(x+2)|, c = -2$

36. $g(x) = |(x-1)|, c = 1$

Tentukan dan Jelaskan apakah fungsi berikut kontinu pada $x = 1$

37. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \le 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & x \le 1 \\ \sqrt{x^2} & x > 1 \end{cases}$

39. Sebuah garis singgung pada kurva $y = x^3 + 1$, memotong kurva di titik (-2, 7). Tentukanlah titik singgung dan gradiennya?

3.2 TEOREMA DASAR PENCARIAN TURUNAN

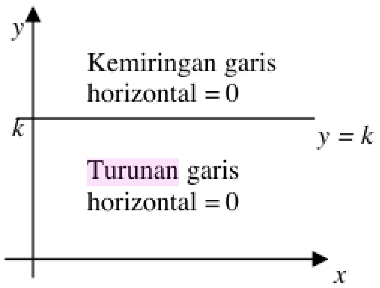
Penggunaan definisi turunan memang dapat digunakan untuk menentukan hasil turunannya. Akan tetapi, untuk fungsi-fungsi yang lebih kompleks tampaknya akan membutuhkan waktu yang lebih lama.

Pada bagian ini, kita akan mengkaji beberapa aturan dasar yang dapat digunakan untuk menentukan hasil turunannya. Aturan-aturan dasar tersebut antara lain, **aturan konstanta, aturan pangkat, aturan penjumlahan dan pengurangan, aturan perkalian skalar dengan pangkat, dan aturan sinus dan cosinus**. Termasuk didalamnya permasalahan laju yang berkaitan.

Aturan-aturan yang ada akan dibuktikan kebenarannya. Hal ini untuk menjamin bahwa aturan tersebut memang dapat menghasilkan turunan yang sesuai.

Aturan Fungsi Konstan

Pada bagian sebelumnya kita menggunakan definisi untuk menentukan turunan fungsi seperti, $f(x) = 3$, $f(x) = -4$, dan lainnya. Lalu bagaiman turunan $f(x) = k$, k konstanta di real?



Teorema: Fungsi Konstan
Jika $y = k$ dengan k konstanta, maka
$$\frac{dy}{dx} = y' = 0$$

Bukti

Misalkan $f(x) = k$, dengan k konstanta. Berdasarkan definisi turunan maka,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(k) - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Oleh karena itu, sangatlah mudah untuk mencari turunan dari sebuah fungsi konstan. Contoh-contoh berikut akan lebih meningkatkan pemahaman kita.

fungsi	Turunan
$y = -5$	$\frac{dy}{dx} = 0$
$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
$h(t) = h_0$, dengan h_0 konstanta	$h'(t) = 0$
$g(x) = \pi$	$g'(x) = 0$

Aturan Pangkat

Penggunaan definisi turunan yang telah dikaji terkait dengan variabel berpangkat masih pada rangkat yang rendah (paling tinggi 3). Untuk pangkat yang lebih tinggi, tampaknya kita perlu untuk menggunakan aturan yang ada.

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang aturan pangkat, kita kaji kembali persamaan binomial untuk menguraikan pangkat.

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$
$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$
$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$
$$(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5.x.h^4 + h^5$$

Secara umum persamaan binomial dapat dituliskan menjadi

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \frac{n(n-1)...(1)}{(n-1)!}xh^{n-1} + h^n$$

Persamaan binomial ini akan digunakan untuk membuktikan teorema aturan pangkat.

Teorema: Aturan Pangkat

Jika n bilangan bulat positif dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = n.x^{n-1}$

Berdasarkan definisi turunan kita peroleh,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + h(n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(n.x^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) \\ &= n.x^{n-1} + 0 + ... + 0 \\ &= n.x^{n-1} \end{aligned}$$

Pada kasus $n = 1$, fungsi $f(x) = x$ dengan turunannya adalah

$$\frac{d}{dx}[x] = 1$$

Hal ini sesuai dengan gradien garis $y = x$ adalah 1.

Contoh 1

Tentukan turunan dari fungsi berikut,

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $f(t) = t^4$

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan pangkat kita peroleh,

1. $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$
2. $g'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$
3. $f'(t) = 4.t^{4-1} = 4t^3$

Contoh 2

Tentukan gradien pada fungsi $f(x) = x^3$ pada titik berikut

a. -3 b. 0 c. $x < 0$ d. $x > 0$

Penyelesaian

Pertama kita cari turunan dari f. Penggunaan aturan pangkat tampaknya mempermudah kita, sehingga kita peroleh,

$f'(x) = 3x^2$

maka,

a. $m = f'(-3) = 3.(-3)^2 = 3.9 = 27$
b. $m = f'(0) = 3.0^2 = 3.0 = 0$
c. untuk $x < 0$, maka $x^2 > 0$. Jadi, $m = f'(x) > 0$
d. untuk $x > 0$, maka $x^2 > 0$. Jadi, $m = f'(x) > 0$

Contoh 3

Tentukan persamaan garis singgung pada kurya $f(x) = x^4$ di $x = -1$.

Penyelesaian

Pertama, kita tentukan koordinatnya dengan mensubstitusikan $x = -1$ ke $f(x)$ sehingga diperoleh

$$f(-1) = (-1)^4 = 1,$$

Jadi, koordinat titik singgungnya adalah (-1, 1).

Kedua, tentukan gradien pada titik (-1, 1), dimana turunan umumnya

$$f'(x) = 4x^3$$

$$m = f'(-1) = 4.(-1)^3 = -4$$

Ketiga, masukkan dalam persamaan, $y - y_1 = m(x - x_1)$ sehingga,

$$y - 1 = -4(x - (-1) = -4x - 4$$

$$y = -4x - 4 + 1 = -4x - 3$$

Jadi, persamaan gari singgungnya adalah $y = -4x - 3$.

Aturan Perkalian skalar dengan fungsi

Berbagai jenis fungsi tidak hanya memuat variabel, seperti x^2, x^3, tetapi berbentuk $2x^2$, $-2x^4$. Bentuk-bentuk terakhir merupakan perkalian skalar dengan variabelnya. Aturan yang pada hampir sama dengan aturan pencarian limit dalam perkalian skalar dengan fungsinya. Oleh karena itu, teorema berikut ini sangat membantu kita.

Teorema:Perkalian skalar dengan fungsi

Jika f(x) terdeferensial dan c konstanta, maka $h(x) = c.f(x)$, dimana

$$\frac{d}{dx}[h(x)] = \frac{d}{dx}[c.f(x)] = h'(x) = c.f'(x)$$

Bukti

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c.f(x+h) - c.f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c.(f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= c.\lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= c.f'(x)$$

Dengan cara yang sama, kita juga akan mendapatkan,

Jika $h(x) = \frac{1}{c}.f(x)$, maka $h'(x) = \frac{1}{c}.f'(x)$

Bentuk lain yang dapat diperoleh adalah,

Jika $h(x) = c.x^n$, maka $h'(x) = c.n.x^{n-1}$

Untuk lebih memahami perhatikan contoh-contoh turunan dari fungsi yang diberikan,

Fungsi	Turunan
$y = 2x^3$	$\frac{dy}{dx} = y' = 2.3x^2 = 6x^2$
$f(x) = -4x^2$	$f'(x) = -8x$
$f(x) = \frac{2}{3}x^5$	$f'(x) = \frac{2}{3}.5x^4 = \frac{10}{3}x^4$
$g(x) = -\frac{3}{5}x^5$	$g'(x) = -\frac{3}{5}.5x^4 = -3x^4$

Aturan Penjumlahan dan Pengurangan

Pada kajian tentang operasi fungsi kita mengenal penjumlahan dan pengurangan dua buah fungsi, $f(x) + g(x)$. Kajian tentang limit juga menyatakan bahwa

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) .$$

Bagaimana dengan turunan dari $h(x) = f(x) + g(x)$? Teorema berikut akan membantu kita untuk menentukannya.

Teorema: Penjumlahan dan Pengurangan

Jika f dan g terdefferensialkan, maka

$$h(x) = f(x) + g(x) \text{ dan } v(x) = f(x) - g(x)$$

juga terdefferensialkan, dimana

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) \text{ dan } v'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Bukti

Berdasarkan definisi turunan kita peroleh,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan untuk pengurangannya, yakni,

$$v'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh terkait dengan aturan yang telah kita pelajari.

Fungsi	Turunan
$y = 2x^3 + 5$	$\frac{dy}{dx} = y' = 2.3x^2 = 6x^2$
$f(x) = -4x^2 + 3x$	$f'(x) = -8x + 3$
$f(x) = \frac{2}{3}x^5 - 2x^3 + 4$	$f'(x) = \frac{2}{3}.5x^4 - 2.3x^2 = \frac{10}{3}x^4 - 6x^2$
$g(x) = -\frac{3}{5}x^5 + 3x^2$	$g'(x) = -\frac{3}{5}.5x^4 + 3.2x = -3x^4 + 6x$

Contoh 4

Tentukan gradien garis singgung pada $g(x) = x^2 + 3x + 2$ pada titik berikut:

a. -1 b. 0 c. 2 d. 3

Penyelesaian

Pertama kita tentukan turunan dari $g(x)$ secara umum, dimana

$$g'(x) = 2x + 3$$

sehingga gradiennya pada titik c adalah m = $g'(c) = 2c + 3$

c	$m = g'(c)$
-1	$2(-1) + 3 = -1$
0	$2(0) + 3 = 3$
2	$2(2) + 3 = 7$
3	$2(3) + 3 = 9$

Contoh 5

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^3 - 2x$ di titik $x = 1$? Sketsalah grafiknya dan selidiki apakah memotong kurva?

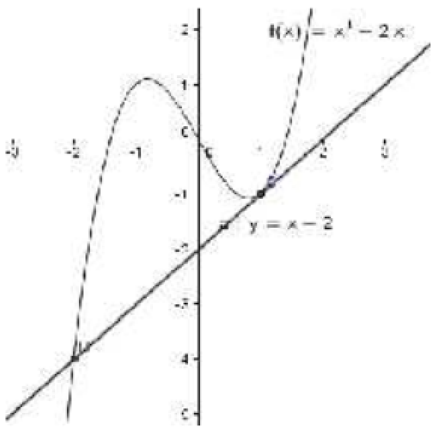
Penyelesaian

Diketahui $f'(x) = 3x^2 - 2$ sehingga gradien di $x = 1$ adalah

$$m = f'(1) = 3.(1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1$$
$$y_1 = f(1) = 1^3 - 2.1 = -1$$

Jadi, persamaan garis singgung pada $f(x)$ di $(1, -1)$ adalah

$$y + 1 = 1(x - 1) = x - 1$$
$$y = x - 1 - 1 = x - 2$$



Berdasarkan grafik disamping tampak bahwa garis singgung memotong kurva $f(x)$.

Untuk mencari titik potongnya, pertama kita samakan kedua persamaannya dimana

$$x^3 - 2x = x - 2$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

Pada kajian tentang limit kita mengenal tentang aturan dasar penentuan limit untuk sinus dan cosinus.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Kedua rumus di atas akan digunakan dalam membuktikan aturan turunan untuk sinus dan cosinus berikut ini.

Teorema:Sinus dan Cosinus

Jika $f(x)$ = sin (x), maka $f'(x)$ = cos(x)

Jika $f(x)$ = cos (x), maka $f'(x)$ = -sin(x)

Bukti

Berdasarkan definisi turunan, maka,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos(h)-1)}{h}+\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\,\frac{(\cos(h)-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\cos(x).\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

$$=\sin x.\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos x.\lim_{h\to 0}\left(.\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

$$=\sin x.0+\cos x.1$$

$$=\cos x$$

Dengan cara yang sama, kita bisa membuktikan untuk turunan dari fungsi $y = \cos x$.

Berikut contoh-contoh yang terkait dengan turunan sinus dan cosinus,

Fungsi	**Turunan**
2 sin(x)	2cos(x)
-x + cos (x)	-1 –sin (x)
x^2 – 2 cos(x)	2x + 2 sin(x)

SOAL LATIHAN

Gunakan aturan dasar turunan untuk menentukan turunan dari fungsi berikut

1. $f(x) = 8$
2. $g(x) = -16$
3. $f(t) = x^5$
4. $h(x) = -x^{12}$
5. $f(x) = 2x + 5$
6. $g(s) = -s + ½$
7. $y = x^2 – 2x +5$
8. $y = -x^2 + 5x -24$
9. $y = 3x^4 + x^3 + 2x$
10. $y = \sin(t) + 2 \cos(t)$
11. $y = \pi \cos(x) + \pi x^2$
12. $y = x^2 – ½ \sin(x)$
13. $y = x(x^2 - 4)$
14. $f(x) = (2x – 4)^3$

Tentukan persamaan garis singgung pada fungsi di titik yang diberikan berikut ini.

15. $f(x) = -\dfrac{1}{2} + x^3$ di $(0, -{}^1/_2)$
16. $y = (2x + 1)^2$ di $(0, 1)$
17. $y = 3(2 – 3x)^2$ di $(1, 3)$
18. $y = 2.\sin(x) -3$ di $(0, 3)$

Tentukanlah nilai *k* sedemikian sehingga garis yang diberikan merupakan garis singgung pada kurva

19. $y = x^2 – k.x$ $\quad y = 5x – 4$
20. $f(x) = k – x^2$ $\quad y = -6x + 1$
21. $f(x) = k\,x^3$ $\quad y = x + 1$
22. $h(x) = -x^3 + k.x$ $\quad y = -x + 2$
23. Sketsalah grafik dari $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 6x – 5$, sketsalah kedua garis singgung yang menyinggung pada kedua kurvanya. Tentukan persamaan kedua garis singgung tersebut.
24. Tunjukkan bahwa grafik $f(x) = 3x + \sin(x) + 2$ tidak memiliki garis singgung horisontal.
25. Tunjukkan bahwa grafik $y = x^5 + 3x^3 + 5x$ tidak memiliki garis singgung dengan gradien sama dengan 3.

3.3 ATURAN PERKALIAN, PEMBAGIAN DAN PANGKAT RASIONAL

Kajian aturan turunan yang telah kita lakukan memanglah masih sederhana. Kajian berikut mungkin akan memerlukan pemikiran lebih untuk memahaminya. Ketelitian dan kesabaran diperlukan dalam proses pencarian turunannya. Sering berlatih akan membuat kita trampil untuk mencari turunan melalui aturan ini.

Bagian ini akan mengkaji tentang aturan pencarian turunan dengan menggunakan aturan perkalian dan pembagian, serta aturan pangkat dengan bilangan rasional.

Aturan Perkalian

Kompleksitas bentuk fungsi yang bervariasi memunculkan berbagai aturan dalam pencarian turunan. Sebuah fungsi mungkin saja merupakan hasil dari perkalian dua fungsi, atau perkalian dua fungsi akan menghasil sebuah fungsi baru. Pada kasus ini, **Aturan Perkalian** dalam pencarian turunan akan mempermudah bagi kita.

Aturan ini dapat digunakan dengan baik untuk perkalian fungsi polinom dengan polinom, polinom dengan fungsi trigonometri, trigonometri dengan trigonometri, atau perkalian fungsi-fungsi lainnya.

Beberapa contoh bentuk perkalian dua buah fungsi dapat kita lihat berikut ini,

$$\left(x^2+3x-2\right)\left(x^4-x^2\right)$$
$$\left(x^2+5\right)\sin^2 x$$
$$\sin x \cos^2 x$$

Aturan perkalian pencarian turunan dapat dilihat pada teorema berikut ini:

Teorema: Aturan Perkalian
Jika f dan g terdifferensialkan, maka $f.g$ juga terdifferensialkan dimana,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

Bukti

Manipulasi aljabar diperlukan dalam membuktikan teorema ini. Seperti biasa berdasarkan definisi turunan, maka

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+g(x)\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$
$$=f(x).g'(x)+g(x)f'(x)$$

Rumusan yang sama dengan kebanyakan buku SMA adalah $y = u(x).v(x)$ sehingga $y' = u'v + v'u$. Konsep yang sama dengan penyimbolan yang berbeda.

Contoh 1

Tentukan turunan dari $h(x) = (5 + x^2)(3 - 2x^2)$

Penyelesaian

Bentuk ini dapat diselesaikan dengan dua cara, cara menyederhankan fungsi dan cara aturan perkalian.

Cara 1(Menyederhanakan fungsi)

$$h(x) = (5 + x^2)(3 - 2x^2) = 15 + 3x^2 - 10x^2 - 2x^4 = 15 - 7x^2 - 2x^4$$

sehingga

$$h'(x) = -7.2x - 2.4x^3 = -14x - 8x^3$$

Cara 2(Aturan Perkalian)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (5+x^2)\frac{d}{dx}\left[3-2x^2\right] + (3-2x^2)\frac{d}{dx}\left[5+x^2\right] \\ &= (5+x^2).-4x + (3-2x^2).2x \\ &= -20x - 4x^3 + 6x - 4x^3 \\ &= -14x - 8x^3 \end{aligned}$$

Melalui kedua cara tersebut dihasilkan turunan fungsi yang sama. Tampak bahwa cara 1 lebih sederhana dibandingkan dengan cara kedua. Akan tetapi, sebelum memutuskan bahwa cara 1 lebih mudah, marilah kita lihat contoh lainnya.

Contoh 2

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 2x^3 \sin(x)$.

Penyelesaian

Pada kasus ini, **cara 1(penyederhanaan fungsi),** tidak bisa digunakan untuk fungsi tersebut.

Dengan aturan perkalian kita peroleh,

$$f(x) = 2x^3.\ \sin(x)$$

$$f'(x) = 2x^3.\ \cos(x) + 6x.\ \sin(x)$$

Contoh 3

Tentukan turunan dari $h(x) = \left(2x^3 - 4x\right)\cos(x)$

Penyelesaian

Misalkan $h(x) = f(x).g(x)$

$$f(x) = (2x^3 - 4x)\text{, maka } f'(x) = (6x^2 - 4)$$

$$g(x) = \cos(x)\text{, maka } g'(x) = -\sin(x)$$

Jadi, $h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$

$$= (2x^3 - 4x).(-\sin(x)) + (6x^2 - 4)\cos(x)$$

$$= -2x^3\sin(x) + 4x\sin(x) + 6x^2\cos(x) - 4\cos(x)$$

Contoh 4

Tentukan turunan dari $y = x^2\sin(x).\cos(x)$

Penyelesaian

Tampak bahwa fungsi y terdiri dari 3 buah fungsi. Oleh karena itu, pencarian turunan akan lebih mudah menggunakan operator turunan yang berbentuk $d./dx$.

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\sin(x).\cos(x)\right]$$

$$= \cos(x).\frac{d}{dx}\left[x^2\sin(x)\right] + x^2\sin(x)\frac{d}{dx}\left[\cos(x)\right]$$

$$= \cos(x)\left\{x^2\frac{d}{dx}(\sin(x)) + \sin(x)\frac{d}{dx}(x^2)\right\} + x^2\sin(x)(-\sin(x))$$

$$= \cos(x).x^2.\cos(x) + \cos(x).\sin(x).2x - x^2\sin^2(x)$$

$$= x^2\cos^2(x) + 2x.\sin(x).\cos(x) - x^2\sin^2(x)$$

$$= x^2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) + x.\sin(2x)$$

$$= x^2\cos(2x) + x.\sin(2x)$$

Contoh 5

Tentukan turunan dari $y = \sin^2(x)$

Penyelesaian

Aturan pangkat tidak bisa digunakan dalam menentukan fungsi tersebut, dikarenakan pangkat yang ada untuk sinus. Oleh karena itu, sedikit manipulasi aljabar dapat diberikan sehingga,

$$y = \sin^2(x) = \sin(x).\sin(x)$$

Sehingga,

$$y' = \sin(x).\cos(x) + \cos(x).\sin(x) = 2.\sin(x).\cos(x)$$

Teorema: Aturan Pembagian

Jika f dan g terdefferensialkan, maka f/g juga terdefferensialkan

dimana, $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Bukti

Seperti biasa kita gunakan definisi turunan untuk membuktikan teorema di atas.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{g(x).f(x+h) - f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x).f(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x)}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{g(x)}{g^2(x)} \cdot f'(x) - \frac{f(x)}{g^2(x)} \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Untuk lebih memahami bagaimana aturan pembagian ini dapat berlaku, mari kita pelajari beberapa contoh berikut ini.

Contoh 6

Tentukan turunan dari $f(x) = \dfrac{x-2}{3x+5}$

Penyelesaian

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x-2}{3x+5}\right] = \frac{(3x+5)D_x(x-2)-(x-2)D_x(3x+5)}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{(3x+1).1-(x-2).3}{(3x+5)^2} = \frac{3x+1-3x+6}{9x^2+30x+25} = \frac{7}{9x^2+30x+25}$$

Fungsi diatas merupakan fungsi dengan pembilang linier dan penyebut berbentuk fungsi linier. Diskusikanlah bagaimana bentuk umum dari turunan fungsi linier berikut,

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Contoh 7

Tentukan turunan dari $g(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan pembagian kita peroleh,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^2+5x-3}{x+3}\right] = \frac{(x+3)D_x(2x^2+5x-3)-(2x^2+5x-3)D_x(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)(4x+5)-(2x^2+5x-3).1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 17x + 15 - 2x^2 - 5x + 3}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + 6x + 9}$$

$$= 2$$

Hasil terakhir tampak seperti hasil turunan dari sebuah fungsi linier. Benar sekali, kalau kita lakukan sedikit manipulasi aljabar sebelum menurunkan dengan aturan pembagian, kita akan memperoleh,

$$g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x+3} = \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)} = 2x - 1$$

Ternyata fungsi $g(x) = 2x - 1$ yang memang menyebabkan $g'(x) = 2$. Apakah hal ini dibenarkan?Tentu, karena pendekatan turunan diberikan oleh limit dengan $h \to 0$, sehingga manipulasi aljabar yang dilakukan akan berlaku.

Contoh 8

Tentukan turunan dari $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{t^2 - 1}$

Penyelesaian

Mengidentifikasi fungsi terlebih dahulu apakah fungsi bisa disederhanakan. Cara yang dapat dilakukan adalah dengan memfaktorkannya.

$$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$$

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

Karena fungsi memiliki faktor yang sama, maka f dapat disederhanakan, sehingga kita peroleh,

$$f(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{t^2 - 1} = \frac{(t-1)(t-3)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t-3}{t+1}$$

Menurunkan bentuk terakhir tampak lebih mudah dibandingkan dengan bentuk awalnya. Sehingga,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{t-3}{t+1}\right]=\frac{(t+1)D_x(t-3)-(t-3)D_x(t+1)}{(t+1)^2}=\frac{(t+1)-(t-3)}{t^2+2t+1}$$
$$=\frac{4}{t^2+2t+1}$$

Contoh 9

Tentukan turunan dari $g(x)=\dfrac{1}{x^n}$

Penyelesaian

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right]=\frac{x^n D_x(1)-1.D_x(x^n)}{(x^n)^2}=\frac{x^n.0-n.x^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$=-n\,x^{n-1}.x^{-2n}$$
$$=-n\,x^{-n-1}$$

Hasil ini mengingatkan kembali kepada aturan pangkat untuk n positif.

Jika $g(x)=x^{-n}$, maka $g'(x)=-n\,x^{-n-1}$

Ini menunjukkan bahwa aturan pangkat yang telah kita pelajari dapat pula digunakan untuk mencari turunan dari fungsi yang berpangkat negatif.

Contoh 10

Tentukan turunan dari $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^4}$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikannya kita dapat menggunakan dengan dua cara,

Cara 1 dengan menggunakan aturan pembagian, sehingga

$$f'(x) = \frac{x^4.(-\cos x) - 4x^3 \sin x}{x^8} = \frac{-x.\cos x - 4\sin x}{x^5}$$

Cara 2, menyusun kembali fungsi sehingga f dapat dinyatakan dalam bentuk, $f(x) = \sin(x).\ x^{-4}$. Sehingga kita bisa menurunkan dengan aturan perkalian. Jadi,

$$f'(x) = -\cos(x).\ x^{-4} + -4x^{-5}.\sin(x)$$

Keduanya memberikan hasil sama.

Contoh 11

Tentukan turunan dari $h(x) = \dfrac{x - \dfrac{1}{x^2}}{2x-1}$

Penyelesaian

Pada dasarnya kita bisa langsung menggunakan aturan pembagian. Akan tetapi, tidaklah begitu sederhana.

Pada kasus ini, akan lebih baik kalau kita **menyusun ulang** kembali fungsi seperti berikut,

$$h(x) = \frac{x - \dfrac{1}{x^2}}{2x-1} = \frac{x.x^2 - 1}{x^2(2x-1)} = \frac{x^3 - 1}{2x^3 - x^2}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x^3 - x^2)D_x(x^3-1) - (x^3-1)D_x(2x^3 - x^2)}{(2x^3 - x^2)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - x^2)3x^2 - (x^3-1)(6x^2 - 2x)}{(2x^3 - x^2)^2} \\ &= \frac{6x^5 - 3x^4 - (6x^5 - 2x^4 - 6x^2 + 2x)}{(2x^3 - x^2)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 6x^2 - 2x}{(2x^3 - x^2)^2} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan pembagian terhadap sinus dan cosinus kita akan mendapatkan beberapa rumusan turunan trigonemetri berikut ini.

Teorema: Turunan Trigonometri lanjutan

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x . \tan x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc^2 x . \cot x$$

Bukti

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x . \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}2$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

Bukti yang lain silahkan anda kerjakan sendiri sebagai bahan latihan.

Contoh 12

Tentukanlah turunan dari

a. $y = x^2 - \tan x$

b. $y = \sec(x) . \tan x$

Penyelesaian

a. fungsi ini berbentuk pengurangan dua buah fungsi. Jadi,

$y' = 2x - \sec^2 x$

b. fungsi ini dapat diturunkan melalui aturan perkalian, sehingga

$$y' = \sec x(\sec^2 x . \tan x) + (\sec x . \tan x .) \tan x$$

$$= \sec x . \tan x(\sec^2 x + \tan x)$$

Dalam trigonometri memungkin berbagai bentuk penyajian. Hal ini dikarenakan ada sifat-sifat identitas yang berlaku dalam trigonometri. Contoh berikut memberikan wawasan bagi kita tentang kemungkinan tersebut.

Contoh 13

Tentukanlah turunan dari $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$

Penyelesaian

Pertama kita turunkan fungsi yang bagian kiri,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right] = \frac{(\sin x)\sin x - (1 - \cos x)(\cos x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

Turunan bagian kanan,

$$f'(x) = -\csc(x).\cot(x) + \csc^2(x)$$

untuk melihat apakah keduanya sama, maka kita gunakan sifat identitas trigonometri sebagai berikut:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \csc^2 x - \frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \csc^2 x - \csc x.\cot x$$

Jadi, keduanya merupakan fungsi yang sama.

Turunan Tingkat Tinggi

Turunan yang kita kenal merupakan turunan pertama. Yang menunjukkan gradien atau kemiringan dari sebuah kurva, menunjukkan kecepatan bila berkaitan dengan posisi benda.

Akan tetapi, kajian tersebut masih terus berkembang. Dalam fisika dikenal konsep **percepatan**, dalam analisis grafik dikenal **maksimum, minimum, dan kecekungan** grafik. Konsep-konsep ini dalam kajian matematika dikenal dengan **turunan kedua**.

Kalkulus menyediakan konsep tersebut dalam topik ***Turunan tingkat Tinggi***. Pada dasarnya, turunan ini merupakan pengembangan dari turunan pertama. Turunan kedua diperoleh dengan menurunkan kembali turunan pertama, begitu juga seterusnya.
Turunan tingkat tinggi dinotasi berikut ini

Turunan	Notasi 1	Notasi 2	Notasi 3	Notasi 4	Notasi 5
Pertama	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$	$D_x y$
Kedua	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$	$D_x^2[y]$
Ketiga	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$	$D_x^3[y]$
...					
Ke-i	y^i	$f^i(x)$	$\frac{d^iy}{dx^i}$	$\frac{d^i}{dx^i}[f(x)]$	$D_x^i[y]$
Ke-*n*	y^n	$f^n(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$	$D_x^n[y]$

Contoh 1

Sebuah benda bergerak sehingga posisinya pada saat *t* detik dinyatakan dalam persamaan,

$$h(t) = \frac{1}{2}t^2 + 18$$

Dimana h dinyatakan dalam meter dan t dalam detik. Tentukan kecepatan dan percepatan pada saat t, berapakah kecepatan dan percepatannya pada saat t = 2 detik.

Penyelesaian

Kecepatan benda pada saat t adalah,

$$v(t) = h'(t) = t$$
$$a(t) = v'(t) = 1$$

Sehingga kecepatan dan percepatannya pada saat $t = 2$ adalah

$$v(2) = 2 \text{ m/dt} \quad a(t) = 1 \text{ m/dt}^2$$

Contoh 2

Dua buah mobil bergerak, posisi mobil A pada saat t detik mengikuti persamaan $s_A(t) = \frac{1}{2}t^2 + 10t + 10$ sedangkan posisi mobil B pada saat t detik adalah $s_B(t) = \frac{1}{2}t^3 + 5t^2 + 2t$. Tentukanlah

a. Posisi awal kedua mobil
b. Apakah kecepatan kedua mobil berbeda?jelaskan
c. Pada saat t = 4, bagaimana posisi kedua mobil

Penyelesaian

a. Posisi awal kedua mobil adalah pada saat $t = 0$, sehingga

$$s_A(0) = \tfrac{1}{2}0^2 + 10.0 + 10 = 10$$

$$s_B(0) = \tfrac{1}{2}0^3 + 5.0^2 + 2.0 = 0$$

b. Kecepatan

$$v_A(t) = t + 10$$
$$v_B(t) = \tfrac{3}{2}t^2 + 10t + 2$$

Berdasarkan kedua fungsi $v(t)$ maka dapat disimpulkan bahwa kedua mobil memiliki kecepatan yang berbeda.

c. Posisi pada saat t = 4

$$s_A(4) = \tfrac{1}{2}4^2 + 10.4 + 10 = 8 + 40 + 10 = 58m$$

$$s_B(4) = \tfrac{1}{2}4^3 + 5.4^2 + 2.4 = 32 + 80 + 8 = 120m$$

Jadi, mobil A berada 58 meter dari posisi awal, sedangkan posisi mobil B berada pada 120 meter dari posisi awalnya

SOAL LATIHAN

Tentukan turunan dari fungsi berikut

1. $g(x) = (2x+5)(-x + 2)$
2. $f(x) = (x^2 + 2x)(-3x + x^2)$
3. $f(x) = (x^{-3} + 3)(2x + 3)$
4. $h(x) = (-3x + x^2).\sin(x)$
5. $y = (x^3 + 2x^2 - 3)^2$
6. $f(t) = t.\sin(t).\tan(t)$
7. $g(t) = t^3.\cot(t)$
8. $y = \cot^2(x)$

Tentukan turunan dari fungsi berikut

9. $y = \dfrac{2x-4}{-x+3}$
10. $y = \dfrac{2x^2+4x}{-x+3}$
11. $f(x) = \dfrac{2x^3+x}{x^2+3}$
12. $y = \dfrac{2x^2-4x}{(x+3)^2}$
13. $g(x) = \dfrac{x^2+x}{\tan x}$
14. $h(x) = \dfrac{x^3 \sin x}{\cot x}$

Tentukan turunan dari fungsi aljabar berikut

15. $f(x) = \dfrac{4-3x-x^2}{x^2-1}$
16. $y = x(1 - \dfrac{4}{x+3})$

17. $y = \dfrac{t}{1 - \cos t}$

18. $g(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 4x}{x^3}$

19. $y = \left(x^3 - 2x^2 + 3\right)(x - 1)(x + 1)$

20. $y = \left(x^3 - 2x^2 + 3\right)\left(\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}\right)$

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva berikut pada titik yang diberikan

21. $f(x) = (x - 1)(x^2 - 3)$, $(1,-2)$

22. $f(x) = \sec(x)$, $(\pi/3, 2)$

23. Tentukan persamaan garis singgung pada fungsi $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, yang paralel dengan garis, $2y + x = 6$. Sketsalah grafiknya

24. Tentukan persamaan garis singgung pada fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, yang melalui titik (-1, 5). Sketsalah grafiknya.

25. Posisi sebuah benda pada saat t detik dinyatakan dalam persamaan $r(t) = \frac{1}{2} t^2 - 4t + 10$ dalam meter. Tentukan kecepatan dan percepatan pada saat t, hitunglah pada saat $t = 5$ detik.

3.4 ATURAN RANTAI, PANGKAT UMUM DAN IMPLISIT

Berbagai aturan telah kita kaji sampai dengan saat ini. Cobalah Kita gunakan untuk menurunkan fungsi berikut,

$$g(x) = \sin(3x)$$
$$h(x) = \cos(x^2)$$
$$f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{30}$$

Kita tidak bisa menggunakan aturan yang telah kita pelajari dengan mudah.

Aturan Rantai

Perhatikan fungsi komposisi $y = f(g(x))$, andaikan $u = g(x)$, maka y dapat dinyatakan dalam $y = f(u)$. Karena turunan merupakan perubahan rata fungsi terhadap perubahan variabelnya. Masuk akal apabila

y berubah, $D_u y$, sebanding dengan perubahan u

u berubah, $D_x u$, sebanding dengan perubahan x

Turunan ini dikenal dengan nama **teorema rantai** yang dinyatakan sebagai berikut.

Teorema: Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdefferensialkan di x dan f terdefferensialkan pada $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $f \bullet g$, yang didefenisikan dengan $f \bullet g = f(g(x))$ terdefferensialkan pada x, dimana,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Dimana

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x)).g'(x)$$

Atau

$$D_x y = (D_u y).(D_x u)$$

Bukti

Untuk mempermudah, kita bisa misalkan $h(x) = f(g(x))$. Berdasarkan definisi turunan, kita peroleh

$$\begin{aligned}
&h'(x) \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}.\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}.\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(g(x)).g'(x)
\end{aligned}$$

Sekarang marilah kita gunakan aturan rantai pada contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1

Tentukan turunan dari $y = \sin(2x)$

Penyelesaian

Cara 1

Kita bisa mengubah fungsi menjadi $y = 2\sin(x)\cos(x)$

Dengan menggunakan aturan perkalian kita peroleh,

$$\begin{aligned}
y' &= 2\sin(x)(-\sin(x)) + 2\cos(x)\cos(x) \\
&= 2(-\sin^2(x) + \cos^2(x)) \\
&= 2\cos(2x)
\end{aligned}$$

Cara 2
Tuliskan fungsi menjadi $y = \sin(u)$ dengan $u = 2x$,
Jadi,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$= \cos u.2 = 2\cos 2x$$

Diskusikan bahwa untuk sembarang konstanta a, akan berlaku turunan berikut.

Jika $y = \sin(ax)$, maka $y' = a\cos(ax)$
Jika $y = \sin(ax)$, maka $y' = a\cos(ax)$

Contoh 2

Tentukan turunan dari $y = \sin(x^3 - 3x^2)$

Penyelesaian

Pertama kita tuliskan,

$$y = \sin u \text{ dan } u = x^3 - 3x^2$$

Dimana,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y.D_x u \\ &= \cos u.(3x^2 - 6x) \\ &= \cos(x^3 - 3x^2).(3x^2 - 6x) \\ &= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2) \end{aligned}$$

Contoh 3
Jika $y = (x^2 + 4x - 1)^{30}$, maka tentukan y'

Penyelesaian
Misalkan $u = (x^2 + 4x - 1)$, maka $y = u^{30}$

Jadi,

$$\begin{aligned} y' = D_u y.D_x u &= 30u^{29}.(2x + 4) \\ &= 30(x^2 + 4x - 1)^{29}.(2x + 4) \end{aligned}$$

Pada contoh terakhir di atas, dapat dilihat bahwa fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk $y = (u(x))^n$. Turunan dari fungsi tersebut dikenal dengan aturan rantai, yang pada kasus ini, disebut dengan **Aturan Pangkat yang diperumum**.

Teorema: Aturan Pangkat yang diperumum

Jika $y = [u(x)]^n$ dengan u terdefferensial pada x dan n rasional, maka y' terdefferensialkan dimana,

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} . \frac{du}{dx} \quad \text{atau} \quad \frac{d}{dx}[u^n] = n u^{n-1} u'$$

Bukti

Bukti dari teorema di atas sebagai latihan Anda. Cara yang dapat digunakan seperti pembuktian dalam aturan rantai yang telah kita lakukan sebelumnya.

Contoh 4

Tentukan turunan dari $y = \dfrac{1}{(2x^5 - 7)^3}$

Penyelesaian

Dengan menyusun kembali persamaan, kita peroleh

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \quad \text{dan} \quad u = 2x^5 - 7$$

Jadi,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y . D_x u \\ &= (-3u^{-4})(10x^4) = \frac{-3}{u^4} . 10x^4 \\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4} \end{aligned}$$

Contoh 5

Tentukan $D_t \left[\dfrac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right]^{1/3}$

Penyelesaian

Seperti sebelumnya, kita bisa susun kembali fungsi

$$y = u^{13} \quad \text{dan} \quad u = \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}$$

Jadi, turunannya adalah

$$\begin{aligned} D_t y &= D_u y . D_t u \\ &= 13u^2 \left\{ \frac{(t^4+3)(3t^2-2) - 4t^3(t^3-2t+1)}{(t^4+3)^2} \right\} \\ &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3} \right)\left\{ \frac{-t^6+6t^4-4t^3+9t^2-6)}{(t^4+3)^2} \right\} \end{aligned}$$

Sekarang kita coba untuk menggunakan mental dalam mencari turunan menggunakan aturan rantai.

$$\begin{aligned} D_x(\cos 3x) &= (-3\sin 3x).3 = -3\sin 3x \\ D_x\left[x^3 + \cos x\right]^5 &= 5\left[x^3 + \cos x\right]^4 (3x^2 - \sin x) \\ D_s\left[\frac{t}{\sin 3t}\right]^4 &= 4\left(\frac{t}{\sin 3t}\right)^3 \frac{\sin 3t - t.(\cos 3t).3}{\sin^2 3t} \\ &= \frac{4t^3 \sin 3t - 12t^4 \cos 3t}{\sin^5 3t} \end{aligned}$$

Fungsi-fungsi yang kita turunkan masih memiliki pangkat 1, seperti,

$$y = x^2 + 3x - 1$$
$$y = x^3$$

Lalu bagaimana turunan dari fungsi-fungsi yang berbentuk,

$$y^3 + y = x^3,$$
$$xy + 5 = y^2$$

Turunan Implisit

Apa yang telah kita miliki belum dapat digunakan dengan baik untuk menentukan turunan dari dua fungsi terakhir.

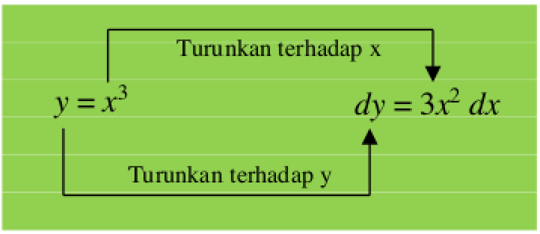
Marilah kita pelajari lebih jauh tentang fungsi $y = x^3$ dimana turunannya terhadap x adalah,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Apabila sedikit kita lakukan manipulasi aljabar, kita peroleh

$$dy = 3x^2 dx .$$

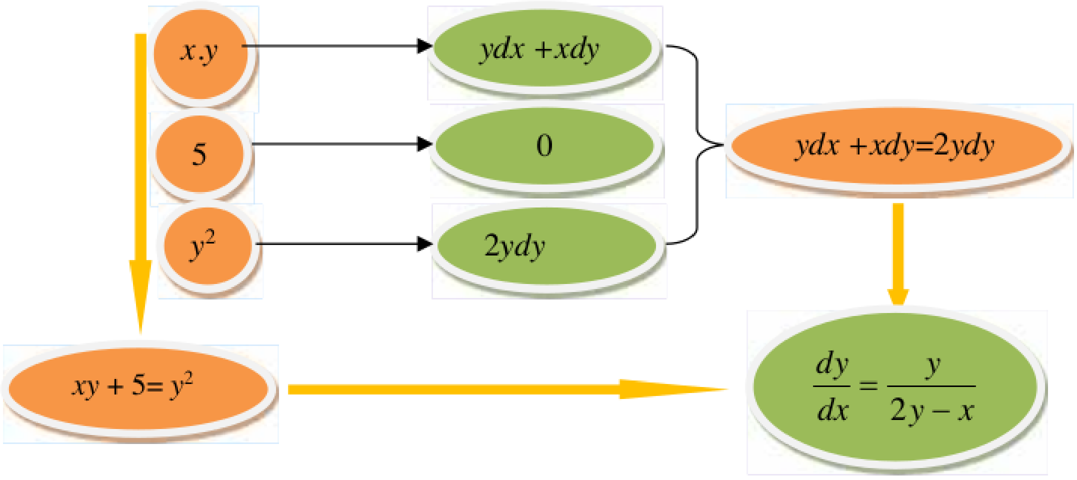
Kalau kita perhatikan fungsi awalnya,



Jadi kita anggap y dan x adalah sebuah fungsi tertentu.
Perhatikan fungsi

$$x.y + 5 = y^2$$

Dengan menggunakan turunan dengan cara di atas kita dapatkan,



Contoh 6

Tentukan turunan dari $4x^2y - 3y = x^3 - 1$

Penyelesaian

Cara 1

Susun kembali fungsi, sehinggan menjadi

Jadi,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(4x^2-3)(3x^2)-(x^3-1)(8x)}{(4x^2-3)^2}=\frac{4x^4-9x^2+8x}{(4x^2-3)^2}$$

Cara 2 (secara implisit)

$$d(4x^2y-3y)=d(x^3-1)$$

$$4x^2dy+8xydx-3dy=3x^2dx$$

$$(4x^2-3)dy=(3x^2-8xy)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2-8xy)}{(4x^2-3)}$$

Tampak bahwa hasil yang diperoleh berbeda. Akan, tetapi kalau kita substitusikan nilai y terhadap hasil pada cara 2, maka akan diperoleh hasil yang sama.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2-8xy)}{(4x^2-3)}=\frac{3x^2-8x\dfrac{x^3-1}{4x^2-3}}{(4x^2-3)}$$

$$=\frac{12x^4-9x^2-8x^4+8x}{(4x^2-3)^2}=\frac{4x^4-9x^2+8x}{(4x^2-3)^2}$$

Contoh 7

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva,

$$y^3+\cos xy=2$$

Di titik (0, 1)

Penyelesaian

Dengan cara implisit kita dapatkan

$$3y^2dy-\sin xy(xdy+ydx)=0$$

$$dy(3y^2-x\sin(xy))=ydx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{(3y^2-x\sin(xy))}$$

Sehingg gradien di titik (0, 1) adalah

$$m = y'(1) = \frac{1}{3.1^2 - 0.\sin(0.1)} = \frac{1}{3}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

Selanjutnya kita akan lihat fungsi lain dimanan fungsi $y = x^r$ dengan r bilangan rasional. Pada kajian sebelumnya kita telah mempelajari untuk pangkat yang berbentuk bilangan bulat. Bentuk sederhana dari fungsi ini adalah

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Sampai saat ini belum ada rumusan yang dapat menurunkannya. Teorema berikut dapat kita gunakan untuk mencarinya

Teorema: Aturan Pangkat Rasional

Jika $y = x^r$ dengan r rasional, maka $y' = r.x^{r-1}$

Bukti

Karena r rasional maka dapat dinyatakan dalam bentuk p/q dengan p,q bilangan bulat, sehingga

$$y = x^r = x^{\frac{p}{q}} \quad \text{atau} \quad y^q = x^p$$

Dengan menggunakan turunan implisit kita dapatkan

$$q.y^{q-1}dy = p.x^{p-1}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{\frac{p}{q}})^{p-1}}$$

$$= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p-r})} = \frac{p}{q}x^{p-1}.x^{r-p}$$

$$= \frac{p}{q}x^{r-1} = r.x^{r-1}$$

Contoh 8

Tentukan turunan dari $y = \left(x^2 + 5\right)^{\frac{2}{3}}$

Penyelesaian

Fungsi ini berbentuk dasar $y = u^{2/3}$ merupakan fungsi pangkat rasional yang diperumum. Turunan fungsi ini dapat diperoleh dengan menggunakan aturan tersebut, dimana

$$y' = \frac{2}{3}\left(x^2 + 5\right)^{\frac{2}{3}-1}(2x) = \frac{4x}{3}\left(x^2 + 5\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Atau

$$y' = \frac{4x}{3\left(x^2 + 5\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + 5}}$$

Contoh 9

Tentukan turunan dari $y = \sqrt{\left(x^3 - 2x\right)^5}$

Penyelesaian

Cara 1

Kita bisa misalkan $y = \sqrt{v}$ dengan $v = u^5$ dan $u = x^3 - 2x$

Jadi,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx} &= \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}.5u^4.(3x^2 - 2) \\ &= \frac{1}{2}\left((u)^5\right)^{-\frac{1}{2}}.5(x^3 - 2x)^4(3x^2 - 2) \\ &= \frac{5}{2}\left(x^3 - 2x\right)^{-\frac{5}{2}}(x^3 - 2x)^4(3x^2 - 2) \\ &= \frac{5}{2}\left(x^3 - 2x\right)^{\frac{3}{2}}(3x^2 - 2)\end{aligned}$$

Cara 2

Manipulasi aljabar dapat diberikan sehingga fungsi dapat disusun ulang menjadi,

$$y = \left(x^3 - 2x\right)^{\frac{5}{2}}$$

Dengan aturan pangkat yg diperumum kita peroleh,

$$y' = \frac{5}{2}\left(x^3 - 2x\right)^{\frac{5}{2}-1}\left(3x^2 - 2\right) \;= \frac{5}{2}\left(x^3 - 2x\right)^{\frac{3}{2}}\left(3x^2 - 2\right)$$

Cara 2 tampaknya lebih sederhana dibandingkan dengan cara 1 (asalkan kita memahami cara manipulasi aljabar untuk menyederhanakan fungsinya). Pada cara 1, kita melakukan penurunan sebanyak 3 kali. Seperti halnya mata rantai yang mungkin lebih dari dua.

Contoh 10

Tentukan turunan dari $y = \cos\left(\sqrt[3]{(x^3+2)^4}\right)$

Penyelesaian

Pertama kita sederhanakan fungsinya sehingga berbentuk

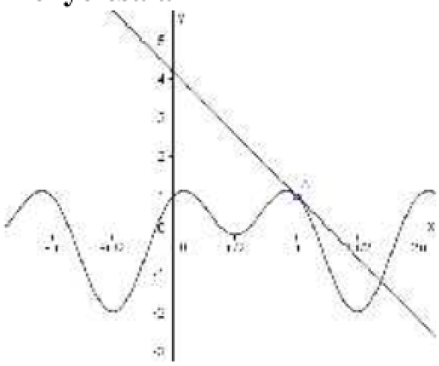
$$y = \cos\left(\left(x^3+2\right)^{\frac{4}{3}}\right)$$

Jadi turunannya adalah

$$y' = -\sin\left(\left(x^3+2\right)^{\frac{4}{3}}\right).\frac{4}{3}\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{3}}3x^2 \;= -4x^2\sin\left(\left(x^3+2\right)^{\frac{4}{3}}\right)\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{3}}$$

Contoh 11. Tentukan persamaan garis singgung pada $y = \sin x + \cos 2x$ di titik $(\pi, 1)$

Penyelesaian



Pertama kita mencari turunan dari y dimana, $y' = \cos x - 2\sin 2x$

Sehingga,

$m = y'(\pi) = \cos\pi - 2\sin 2\pi \; = -1$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = -1(x - \pi) = -x + \pi$$

$$y = -x + \pi + 1$$

SOAL LATIHAN

Gunakan aturan rantai untuk mencari turunan fungsi berikut ini

1. $f(x) = g(x^3 + 2x)$
2. $h(x) = f^2(x^3 + 2x)$
3. $y = \sin(x^3 + 2x)$
4. $y = \tan(x^3 + 2)$
5. $y = \sin(\cos(x^3 + 2x))$
6. $y = \sin^2(t^3 - 2t^2)$
7. $y = \sec(t^3 - t^2)$
8. $y = \sin(\sqrt{x^3 + 2x})$

Gunakan aturan pangkat yang diperumum untuk menentukan turunan dari fungsi berikut ini,

9. $f(x) = (x^4 - 3x)^4$
10. $f(x) = (x^2 - 2x)^6$
11. $y = \cos^{-5}(x+1)$
12. $g(t) = \sin^4(x^4 - 3x)$
13. $f(s) = \tan(s^4 - 3s)^4$
14. $h(t) = \sec^2(x^4 - 3x)^4$
15. $f(x) = \left(\sqrt{x^4 - 3x}\right)^4$
16. $f(x) = (x^4 + 3x^2)^{\frac{3}{5}}$
17. $f(x) = (2x^4 - 3x)^{-\frac{3}{7}}$
18. $g(x) = \sin^{-4} x$
19. $f(x) = \cos^{\frac{3}{2}}(x^4 - 3x)^4$
20. $g(x) = \left(\dfrac{x^4 - 3x}{x^2 + 1}\right)^4$

Gunakan aturan implisit untuk menentukan turunan dari fungsi berikut ini

21. $y^2 + 3x = y$
22. $xy^2 + 3x^2 = 3y^3$
23. $xy^2 3 - 3yx^2 = 4$
24. $x^2y^2 + 3x^4 = -3y^3$
25. $x\sqrt{y^2} + 1 + xy = 3x^3$
26. $xy + \sin(yx) = 2$
27. $\cos(xy^2) = y^2 + x$
28. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$

Tentukan persamaan garis singgung pada titik yang diberikan

29. $x^2 + y^2 = 9, (-1,2)$
30. $x^3 y + y^3 x = 30, (1,3)$
31. $xy + y^3 = 6, (-1,2)$
32. $\sin(xy^2) = y, (\pi/2, 1)$
33. $y + \cos(y^2 x) + 3x^2 = 4, (1,0)$
34. $x^{2/3} y - y^3 = -6, (1,2)$

35. Sketsalah grafik dari $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$ dan tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik asalnya.

36. Gunakan turunan implicit kedua untuk menentukan nilai di (3,4) jika $x^2 + y^2 = 25$.

37. Sebuah partikel dengan masa m bergerak menurut sumbu x sedemikian sehingga x dan kecepatan $v = dx/dt$ memenuhi

$$m(v^2 - v_o^2) = k(x_o^2 - x^2)$$

Dimana v_0, x_0, dan k konstan. Tunjukkan bahwa turunan implisitnya.

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \text{, dimana } v \neq 0.$$

38. Tentukan titik pada kurva $x^2 y - xy^2 = 2$ sehingga persamaan garis singgung adalah persamaan garis singgung vertical, di mana $dx/dy = 0$.

39. Tunjukkan persamaan garis singgung pada elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ di (x_0, y_0) adalah $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

40. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus dengan $y = \frac{1}{2}x + 2$, pada kurva $x^2 + y^2 = 4$

BAB IV
APLIKASI TURUNAN

Turunan mempermudah kita untuk menentukan solusi dari berbagai permasalahan yang dihadapi dalam matematika, fisika, biologi, kimia, ekonomi, kependudukan dan lainnya.
Perilaku grafik fungsi, nilai minimum dan maksimum, kecekungan grafik, asymptot grafik dalam diselesaikan dengan baik oleh turunan. Masalah mekanika dalam fisika, pertumbuhan bakteri, virus dalam biologi, minimum biaya dan maksimasi keuntungan dapat digunakan turunan atas model yang dibuat.
Tidak bisa dipungkiri bahwa ada kendala atau keterbatasan yang dihadapi dalam mengatasi sebuauh permasalahan. Oleh karena itu, optimasi menjadi sebuah pilihan dalam menyelesaikan permasalahan.

Pada bagian ini, kita akan mengkaji tentang: Maksimum dan Minimum, Kemonotonaan dan Kecekungan, Masalah Maksimum dan Minimum, Penggambaran Grafik Canggih, Kecepatan, Optimasi, Nilai Rata-rata, L'Hopital

4.1 Maksimum dan Minimum

4.2 Kemonotonan dan Kecekungan

4.3 Masalah Maksimum dan Minimum

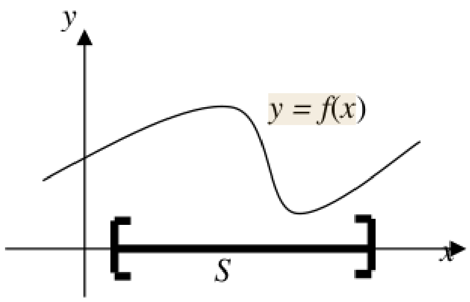
4.4 Analisis Grafik dan Sketsa

4.5 Optimasi, Kecepatan dan Nilai Rata-rata

MATERI 4.1 Maksimum dan Minimum

Fungsi berkaitan dengan nilai. Nilai-nilai yang dihasilkan fungsi, sebut $f(x)$, sebagian berbeda-beda bergantung pada jenis fungsi dan nilai yang disubstitusikan, sebut x, pada fungsi tersebut. Nilai fungsi pada x tertentu mungkin lebih besar dari nilai-nilai yang dihasilkan atau sebaliknya, nilai tersebut paling kecil diantara nilai-nilali lain yang dihasilkan.

Perhatikan ilustrasi grafik berikut!



Grafik disamping adalah grafik fungsi y = f(x) dan sebuah daerah S. Kita bisa melihat bahwa f(x) memiliki nilai terendah (minimum) dan tertinggi (maksimum) pada daerah S.

Definisi:

Dari grafik diatas kita dapat ditarik pernyataan sebagai berikut:

Jika S daerah asalnya f dan memuat titik c, maka,

- $f(c)$ merupakan nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x); \forall x \in S$.
- $f(c)$ merupakan nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x); \forall x \in S$.
- $f(c)$ merupakan nilai ekstrim f pada S jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

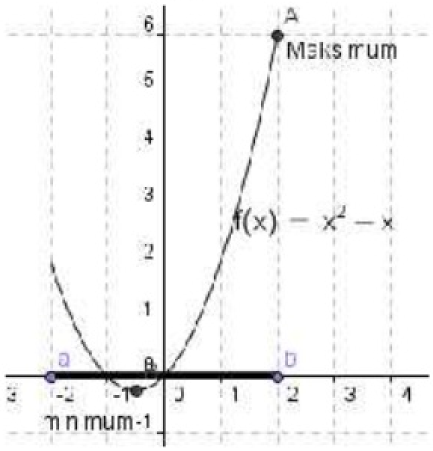
Pada daerah / selang tertentu (bagian dari domainnya) fungsi senantiasa memiliki nilai maksimum dan minimum. Seperti halnya suhu udara dalam satu minggu pasti ada suhu yang tertinggi dan terrendah. Meskipun belum tentu terendah pada sepanjang tahun tersebut. Perhatikan dan pahami teorema berikut ini:

Teorema A(Teori eksistensi maksimum-minimum).

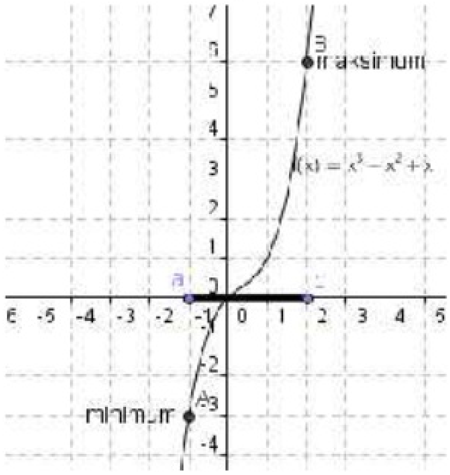
Jika f kontinuan pada selang tertutup $[a, b]$, maka nilai f berada diantara nilai maksimum atau minimum pada selang tersebut.

Perhatikan beberapa contoh grafik berikut ini dan selang yang diberikan,

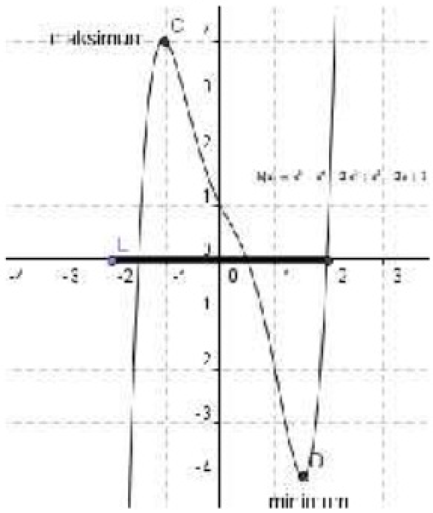
(A)



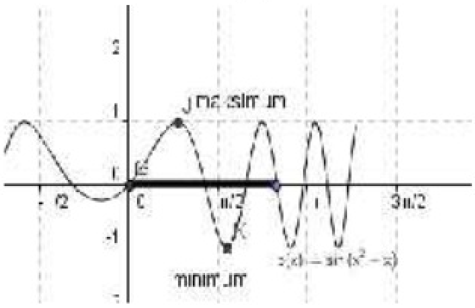
(B)

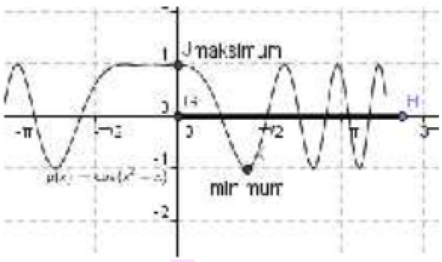


(C)



(D)





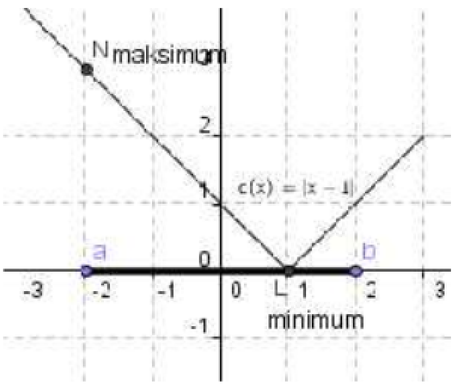
(E)

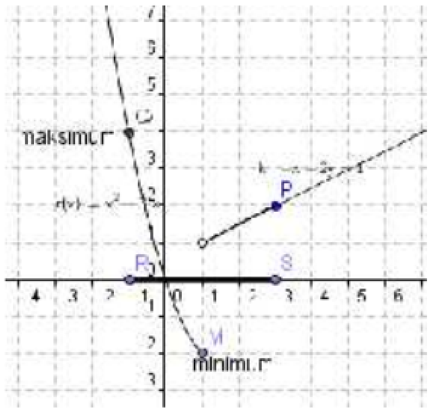
Dari gambar-gambar diatas dapat dilihat bahwa nilai fungsi berada diantara nilai minimum dan maksimum pada selang yang diberikan.

Nilai maksimum dan minimum dapat terjadi pada **ujung kedua selang** tertutupnya, seperti gambar (B). Nilai maksimum dan minimum mungkin juga terletak pada **pergantian naik dan turunnya grafik** seperti pada gambar (C) dan (D). Nilai maksimum atau minimum terjadi pada **salah satu ujung selang dan pergantian naik turunnya grafik** seperti pada gambar (A) dan (E).

Titik dimana pergantian naik turunnya grafik dalam matematika dikenal dengan nama **titik stasioner**. Titik ini terjadi apabila turunannya pada titik tersebut sama dengan nol, atau $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

Lalu, mungkinkah nilai maksimum atau minimum terjadi selain di atas? Tentu, mari kita lihat dua grafik berikut ini.





Pada kedua fungsi di atas, nilai maksimum dan minimum terjadi dimana **fungsi tidak memiliki turunan**. Dalam konsep matematika, titik tersebut dikenal dengan nama **titik singular**.

Jadi, nilai maksimum atau minimum pada selang tertutup [a,b] dapat terjadi pada kedua ujung selang, titik stasioner atau titik singular.

Perhatikan teorema berikut ini,

Teorema B(Teorema titik kritis).

Andaikan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:

- Titik ujung dari I;
- Titik stasioner dari $f(f'(c) = 0)$;
- Titik singular dari $f(f'(c)$ tidak ada).

Bukti

Andaikan $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada I dan c bukan titik ujung ataupun titik singular, Cukup ditunjukkan bahwa c adalah titik stasioner.

Karena f(c) adalah nilai maksimum, $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I, yaitu:

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Jadi, jika $x < c$, sehingga $x - c < 0$, maka:

$$(1) \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Sedangkan jika $x > c$, maka:

$$(2) \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Tetapi $f'(c)$ ada, karena c bukan titik singular.

Akibatnya, jika kita biarkan $x \to c^-$ dalam (1) dan $x \to c^+$ dalam (2), maka

$$f'(c) \geq 0 \text{ dan } f'(c) \leq 0.$$

Kita simpulkan seperti yang diinginkan yaitu $f'(c) = 0$.

Contoh 1

Carilah titik-titik kritis dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $[-\frac{1}{2}, 2]$!

Penyelesaian

Diketahui bahwa titik ujung adalah $-\frac{1}{2}$ dan 2.

Untuk mencari **titik stasionernya** kita cari turunan dari f (x), sehingga

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = -6.x.(x-1) = 0$$

untuk x, diperoleh 0 dan 1.

Dalam hal ini, tidak terdapat titik-titik singular karena fungsi polinom kontinu untuk x di real.

Jadi titik-titik kritisnya adalah $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2.

Contoh 2

Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari fungsi dan selang yang diberikan berikut,

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 \text{ , } [-\frac{1}{2}, 2]$$

Penyelesaian

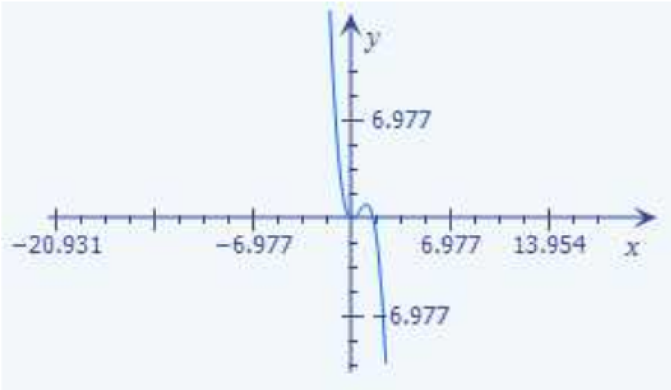
Dalam contoh 1 diatas di peroleh bahwa $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2 adalah nilai-nilai kritis.

Dan masukkan nilai-nilai kritis tersebut ke dalam $f(x) = -2x^3 + 3x^2$, sehingga diperoleh

$$f(-\frac{1}{2}) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ dan } f(2) = -4.$$

Jadi didapat nilai maksimumnya yaitu 1 pada nilai kritis $-\frac{1}{2}$ dan 1. Dan nilai minimumnya adalah -4 pada nilai kritis 2.

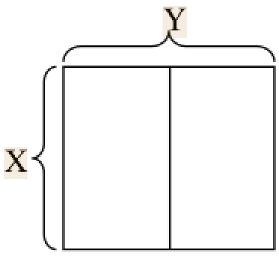
Grafik $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ dapat dilihat sebagai berikut.



Contoh 3.

Seorang peternak mempunyai 100 meter kawat berduri yang akan dipakai untuk membuat dua pagar identik yang berdampingan (lihat gambar!). Berapa ukuran seluruh kelilingnya agar luasnya maksimum?

Penyelesaian.



Andai x merupakan lebar dan y adalah panjang seluruh keliling yang keduanya dalam meter pada panjang kawat 100 meter, maka dibuat persamaan

$3x + 2y = 100$, Sehingga: $y = 50 - \frac{2}{3}x$

Maka, luas total B (misalnya) adalah:

$$B = x.y = 50x - \frac{2}{3}x^2$$

Dalam hal ini harus ada tiga sisi panjang x, kita lihat bahwa $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$. Jadi kita harus memaksimumkan B pada $[0, \frac{100}{3}]$.

$$\frac{dB}{dx} = 50 - 3x$$

misal kita tetapkan $50 - 3x = 0$ dan diperoleh nilai $x = \frac{50}{3}$. Jadi terdapat tiga titik kritisya yaitu 0, $\frac{50}{3}$ dan $\frac{100}{3}$. Kedua titik ujung 0 dan $\frac{100}{3}$ menyebabkan $B = 0$, sedangkan $x = \frac{50}{3}$ menyebabkan $B = 416{,}67$.

Jadi ukuran yang diinginkan agar luasnya maksimum adalah $x = \frac{50}{3}$ meter dan $y = 50 - \frac{2}{3}(\frac{50}{3}) = 25$ meter.

Contoh 4

Tentukan nilai maksimum dari perkalian dua bilangan taknegatif apabila jumlahnya 16.

Penyelesaian

Misalkan kedua bilangan, x dan y. sehingga $x + y = 16$. Sehingga interval dari x adalah [0,16]

Andaikan perkalian dua bilangan, $M = x.y = x\,(16 - x) = 16x - x^2$

Jadi, permasalahannya adalah,

Maksimumkan $M(x) = 16x - x^2$ pada [0,16].

Turunan dari M adalah $M'(x) = 16 - 2x$, dimana $M'(8) = 0$

Jadi, nilai maksimumnya adalah

x	*y*	*M*
0	16	0
8	8	64
16	0	0

Berdasarkan table, maka nilai maksimumnya adalah 64 dimana x = 8 dan y = 8

Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum pada fungsi dan selang yang diberikan berikut ini,

a. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, [-2,2] b. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x < 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases}$, [-2, 2]

Penyelesaian

a. Karena fungsi f merupakan polinom, maka f memiliki turunan pada setiap x di real. Jadi, turunannya adalah

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$$

Sehingga f bernilai 0 di $x = 1$ dan $x = {}^1/_3$.

Jadi, titik kritisnya terjadi pada -2, 1/3, 1, 2

x	-2	1/3	1	2
f(x)	-18	0,15	0	2

Berdasarkan table disamping maka nilai maksimumnya adalah 2 dan minimumnya -18

b. Karena $f(x)$ tidak mempunyai limit di $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 - 3x = -2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x + 2 = 4$$

Maka f(x) tidak kontinu di x = 2 dan tidak memiliki turunan di x = 2, jadi titik ini merupakan titik singular.

Pada selang [-2,2), turunannya adalah $f'(x) = 2x - 3$, jadi pada titik x = 3/2 merupakan titik stasioner.

x	-2	3/2	2
f(x)	-2	-9/4	4

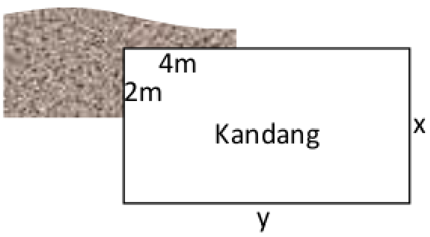
Berdasarkan table disamping maka nilai minimum = -9/4 dan maksimum = 4.

SOAL LATIHAN

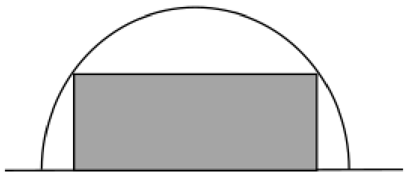
Tentukan titik kritis dan nilai maksimum atau minimum pada fungsi dan selang yang diberikan berikut ini

1. $f(x) = x^2 + 2x; I = [-3,2]$
2. $f(x) = x^2 + x; I = [-2,2]$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 1; I = [-3,2]$
4. $f(x) = x^3 - x; I = [-3,1]$

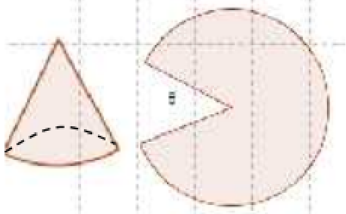
5. $f(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 2x^2 - 12x);$ $I = [-3,3]$
6. $g(x) = \dfrac{1}{x+1}; I = [-3,2]$
7. $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}; I = [-\infty, \infty]$
8. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}; I = [2,6]$
9. $g(t) = t\sqrt{4-t}; I = [-5,3]$
10. $g(x) = 4 - |x-1|; I = [-3,2]$
11. $h(x) = \dfrac{1}{1+|x+1|}; I = [-3,2]$
12. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}; I = [-3,2]$
13. $g(x) = \dfrac{1}{x+1}; I = [-3,2]$
14. $s(x) = 4\cos \pi x; I = [0, \frac{2}{3}]$
15. $s(x) = 4\cos \pi x + \sin^2 \pi x; I = [0, \frac{2}{3}]$
16. Tentukan volume terbesar dari sebuah karton yang dengan luas 24 cm^2 dengan cara memotong secara persegi setiap sudutnya.
17. Sebuah kandang agar dipagari dengan kawat berduri sepanjang 80 m. Apabila bentuk kandang yang dipagari menempel pada tembok (lihat gambar (a)). Tentukan ukuran kandang agar dapat memagari luas yang maksimum



(a)


(b)

18. Sebuah segiempat dibuat dalam setengah lingkaran yang berjari-jari r. tentukanlah ukuran dari segiempat agar luasnya maksimum (lihat gambar b di atas).
19. Sebuah corong dibuat dengan cara memotong juring lingkaran yang berjari-jari 40 cm dengan sudut θ. Tentukanlah besar θ agar volume corong maksimum.



MATERI 4.2

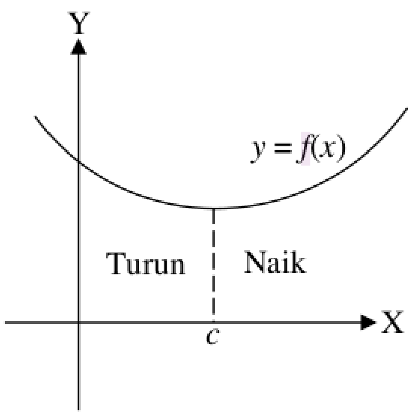
Kemonotonan dan Kecekungan

4.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Pendekatan turunan melalui garis singgung tampak baik untuk menggunakan turunan dalam mengamati perilaku atau karakteristik grafik fungsi. Turunan pertama yang menyangkut gradient menunjukkan kemiringan kurva pada titik tertentu.

Gradient garis positif menunjukkan bahwa garis naik, untuk gradient negative garis menunjukkan turun. Analogi dengan itu, maka fungsi pada selang tertentu dimana turunannya positif grafiknya naik. Sedangkan sebaliknya bila turunannya negative maka fungsinya turun.

Perhatikan gambar disamping ini!



Definisi:

Andaikan f didefinisikan pada selang I (terbuka, tertutup, atau tak satupun), maka:

- f dikatakan naik pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I.
  $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f dikatakan turun pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I.
  $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f monoton murni pada I jika naik pada I atau turun pada I.

Turunan fungsi yang didefinisikan melalui

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Menunjukkan bahwa apabila $f(x+h)-f(x)>0$ tentu turunannya bernilai positif dan grafik fungsinya naik. Demikian pula sebaliknya $f(x+h)-f(x)<0$ maka turunannya bernilai negative dan grafik fungsinya turun.

Teorema A(Teori kemonotonan).

Andaikan f kontinu pada selang I dan dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam dari I, maka:

- Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f naik pada I.
- Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f turun pada I.

Teorema ini biasanya memperbolehkan untuk menentukan dimana suatu fungsi terdiferensial naik atau turun. Ini merupakan masalah penyelesaian dua pertaksamaan.

Contoh 1.

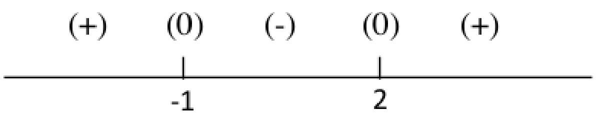
Carilah dimana f naik dan turun jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$!

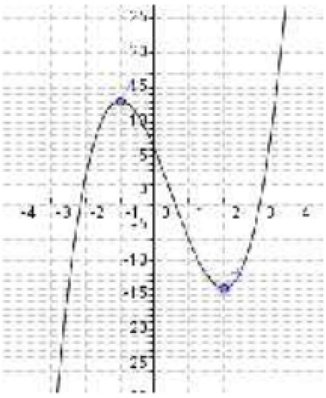
Penyelesaian.

Kita diferensialkan terlebih dahulu f nya menjadi,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

kita harus menentukan dimana $(x+1)(x-2) > 0$ dan juga $(x+1)(x-2) < 0$. Titik-titik pemisahnya adalah -1 dan 2, dan kita membagi sumbu-x atas tiga selang yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, dan $(2, \infty)$. Dengan memakai titik-titik uji -2, 0, dan 3, kita simpulkan bahwa $f'(x) > 0$ pada yang pertama dan terakhir dari selang-selang ini dan bahwa $f'(x) < 0$ pada selang tengah. Jika digambarkan adalah sebagai berikut! Nilai-nilai dari f'





Menurut Teori A diatas, f naik pada (-∞, -1) dan (2, ∞) dan turun pada [-1, 2]

Contoh 2.

Tentukan dimana $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ naik dan dimana turun!

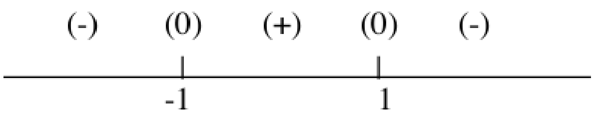
Penyelesaian.

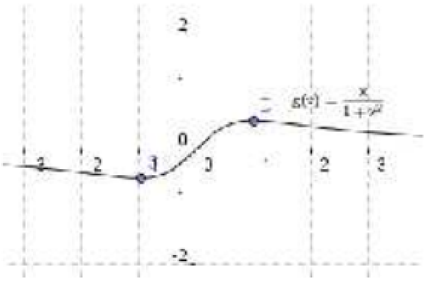
Kita diferensialkan dulu g nya, yaitu:

$$g'(x) = \frac{((1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

Karena penyebut selalu positif, $g'(x)$ mempunyai tanda sama seperti $(1 - x)(1 + x)$. Titik-titik pemisah -1 dan 1 menentukan tiga selang (-∞, -1), (-1, 1) dan (1, ∞). Jika kita mengujinyan maka didapat bahwa $g'(x) < 0$ pada selang-selang yang pertama dan ketiga dan bahwa $g'(x) > 0$ pada selang kedua.

Nilai-nilai dari f'





Menurut teori A diperoleh bahwa g naik pada pada [-1, 1] dan turun pada [-∞, -1] dan [1, ∞].

Turunan Kedua dan Kecekungan

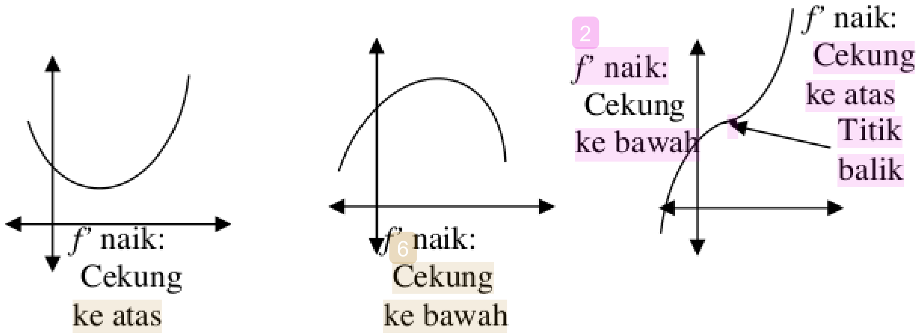
Selain kemonotan (naik turunnya grafik) fungsi juga memiliki kecekungan yang berbeda. Kecekungan grafik ini ditentukan oleh apakah gradiennya naik atau gradiennya turun.

Dalam mekanika, kecepatan mungkin berubah-ubah bergantung pada percepatan benda. Benda akan dipercepat apabila percepatannya positif dan diperlambat apabila percepatannya negative.

Definisi

Andaikan f terdiferensialkan pada selang terbuka I = (a, b). Jika f' naik pada I, maka f dan grafiknya cekung keatas dan jika f' turun pada I, maka f dan grafiknya turun ke bawah.

Untuk lebih memahami perhatikan grafik berikut ini,



Teorema B(Teorema kecekungan).

Jika f terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka (a, b), maka:

- Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I=(a, b), maka f cekung ke atas pada I.
- Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I=(a, b), maka f cekung ke bawah pada I.

Teorema ini mengubah masalah penentuan kecekungan ke masalah penyelesaian pertaksamaan.

Contoh 3.

Tentukan selang dimana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ naik, turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah!

Penyelesaian.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

Nilai-nilai dari f'

(+)   (0)   (-)   (0)   (+)

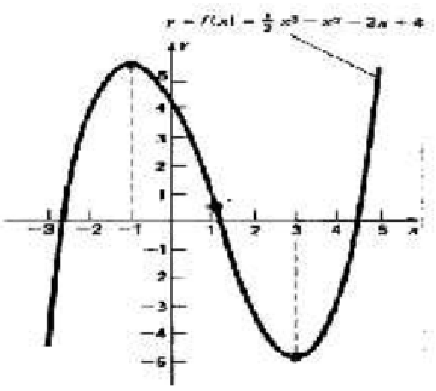
-1   3

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

Nilai-nilai dari f''

(-)   (0)   (+)

-1



Dengan menyelesaikan pertaksamaan $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan lawannya kita dapatkan bahwa f naik pada selang $(-\infty, -1]$ dan $[3, \infty)$ dan turun pada $[-1, 3]$. Demikian juga penyelesaian $2(x - 1) > 0$ dan $2(x - 1) < 0$ menunjukkan bahwa f cekung ke atas pada $(1, \infty)$, cekung ke bawah pada $(-\infty, 1)$

Sumber: Varberg Purcell Rigdon. *Calculus, Eight edition*.

Contoh 2

Tentukan selang dimana $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ naik, turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah.

Penyelesaian

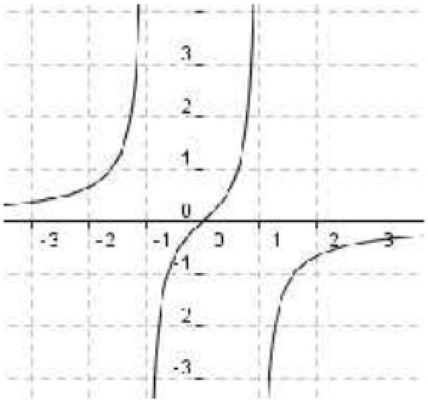
Turunan pertama $f'(x) = \dfrac{(1 - x^2) + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$, Jadi $f'(x) > 0$ untuk setiap x pada domainnya yang berarti $f(x)$ naik untuk setiap x di real.

Turunan kedua,

$$f''(x) = \frac{2x(1-x^2)^2 + 4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2)+4x(1+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{2x-2x^3+4x+4x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{6x+2x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Turunan kedua akan bernilai 0 apabila $2x\,(3 + x^2) = 0$ atau $x = 0$ dan tidak terdefinisi pada $x = \pm 1$

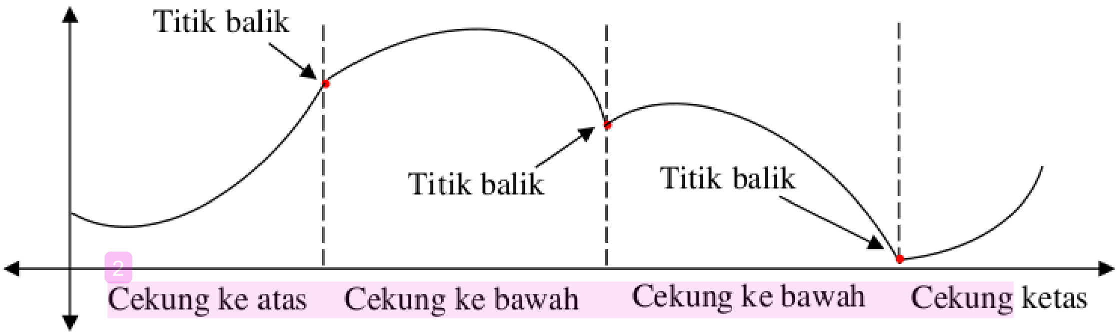


Selang	(-∞, -1)	(-1,0)	(0,1)	(1,∞)
f'	+	+	+	+
f''	+	-	+	-
Kecekungan	atas	bawah	atas	bawah

Ilustrasi dapat dilihat pada grafik disamping, dimana fungsi naik untk semua x

Titik Balik

Andaikan f kontinu di c, kita sebut $(c, f(c))$ suatu titik balik dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c.



Contoh 4.

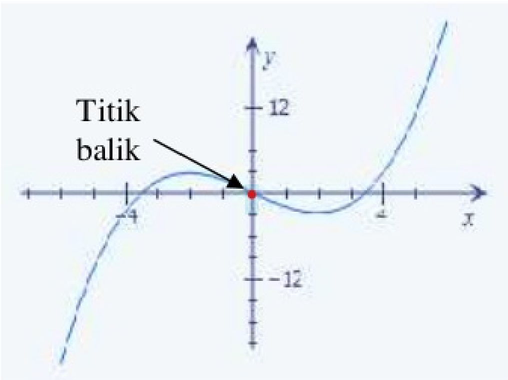
Carilah titik-titik baliknya dari grafik $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$!

Penyelesaian.

Kita diferensialkan terlebih dahulu menjadi,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \qquad\qquad f''(x) = x$$

Daalam hal ini hanya ada satu titik balik, yaitu titik dimana $f''(x) = 0$.



Ini terjadi pada titik asal (0, 0). Titik tersebut adalah titik balik menyusul dari $f''(x) < 0$ untuk $x < 0$ dan $f''(x) > 0$ untuk $x > 0$. Jadi, kecekungan berubah arah di titik (0, 0).

Contoh 5.

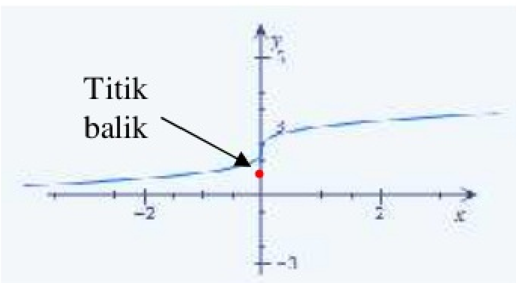
Cari semua titik balik dari $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$!

Penyelesaian.

Diferensialkan terlebih dahulu,

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \qquad\qquad f''(x) = \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}}$$

turunan kedua tidak pernah 0, tetapi gagal untuk ada di $x = 0$.



Titik (0, 2) adalah titik balik karena $f''(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $f''(x) < 0$ untuk $x > 0$. Grafiknya seperti dibawah ini.

SOAL LATIHAN

Tentukanlah selang dimana fungsi berikut naik dan dimana turun

1. $f(x) = 4x - 3$
2. $g(x) = mx + n$
3. $f(t) = -2(t-1)(t+2)$
4. $f(s) = 2s^2 + 6s - 5$
5. $h(x) = ax^2 + bx + c$
6. $g(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$
7. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12$
8. $h(x) = \dfrac{1}{x + x^2}$
9. $g(t) = \dfrac{t^2}{1 + 2t + t^2}$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
11. $h(t) = \left|\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + t^2\right|$
12. $H(t) = \sin 2t, -\pi \le t \le \pi$

Tentukanlah selang dimana fungsi berikut cekung ke atas dan dimana cekung ke bawah serta titik balik jika ada

13. $f(x) = (2x+1)^2$
14. $g(x) = ax^2 - c$
15. $h(s) = s^4 - 6s^3 - 24s^2 + 3s + 1$
16. $h(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$
17. $f(t) = t^4 + 2t^2$
18. $g(t) = t^2 - \dfrac{1}{t^2}$
19. $H(x) = (2x-1)^{\frac{2}{3}}$
20. $F(x) = x^4 + 8x^3 - 2$

Tentukan dimana grafik dari fungsi berikut naik, turun, cekung ke atas, cekung ke bawah, sketsalah grafiknya

21. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
22. $g(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
23. $g(x) = x^4 - 6x^2 + 5$
24. $h(x) = -2x^2 + \dfrac{2}{x^2}$
25. $h(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$
26. $F(x) = x^2\sqrt{x^2 - 3x}$
27. $G(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}}$
28. $G(t) = 2t^2 + \cos^2(\pi t)$

29. Sketsalah sebuah grafik pada selang [0,6] yang memenuhi kondisi berikut;

    $f(0)=3; f(2)=2; f(6)=6$

    $f'(x)<0$ pada $(0,2)\cup(2,6); f'(2)=0$

    $f''(x)<0$ pada $(0,1)\cup(2,6); f''(x)>0$ pada $(1,2)$

30. Lakukan analisis kapan fungsi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ senantiasa turun?

31. Diketahui $f'(x)>0$ dan $g'(x)>0$ untuk semua x di real. Tunjukkan kapan pernyataan berikut ini benar untuk semua x (tambahkan syarat jika memang diperlukan)

    (a) $f(x)+g(x)$ naik untuk semua x

    (b) $f(x).g(x)$ cekung ke atas untuk semua x

32. Tunjukkan bahwa $y=x^n$ dengan n positif akan senantiasa naik untuk n ganjil dan senantiasa cekung keatas untuk n genap?

33. Buktikan bahwa fungsi $y=\left|\dfrac{x}{1-x^2}\right|$ senantiasa cekung ke atas untuk setiap x di domainnya!

34. Selidikilah apakah y = | sin(πx) | selalu cekung ke bawah?

35. Diketahui sebuah fungsi f didefinisikan sebagai berikut;

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2-x+1 & x\le 2 \\ 2x-1 & 2<x\le 5 \\ x^2-6x & x>5 \end{cases}$$

Tentukanlah kapan fungsi naik, turun, cekung ke atas dan cekung kebawah.

MATERI 4.3 Masalah Maksimum dan Minimum

Nilai maksimum dan minimum merupakan istilah yang sering kita jumpai dalam keseharian. Berkaitan dengan apa yang kita keluarkan minimum menjadi tujuan. Akan tetapi, berkaitan dengan apa yang kita terima tentu maksimum harapan kita.

Lalu samakah maksimum bagi seseorang, dengan maksimum bagi orang lain? Demikian pula minimum bagi orang belum tentu minimum bagi orang lain. Upah minimum di setiap kota juga berbeda. Nilai tertinggi di sebuah sekolah belum tentu tertinggi bila dibandingkan dengan sekolah lain.

Oleh karena itu, nilai maksimum dan minimum wajar bila disebut dengan minimum dan maksimum lokal. Kalkulus juga membicarakan tentang konsep maksimum dan minimum lokal.

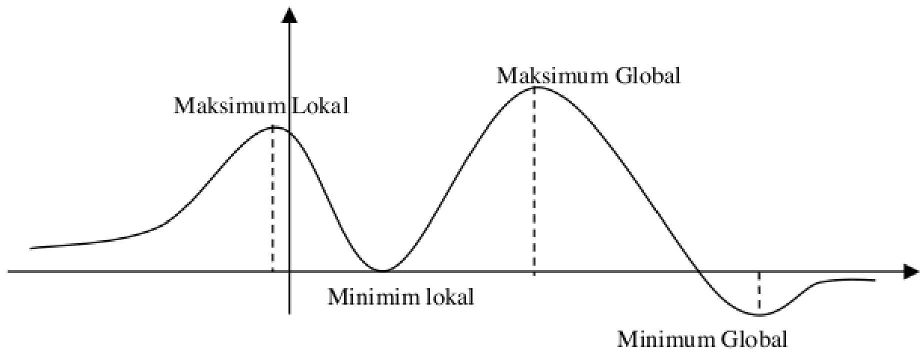
Maksimum dan Minimum Lokal

Definisi: Jika S merupakan daerah asal f dan memuat titik c, maka:

- $f(c)$ nilai maksimum lokal f jika terdapat selang (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$;
- $f(c)$ nilai minimum lokal f jika terdapat selang (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$;
- $f(c)$ nilai ekstrim lokal f jika $f(c)$ berupa nilai maksimum lokal atau minimum lokal.

Nilai maksimum dan minimum lokal terdapat pada sebuah selang tertentu yang merupakan bagian dari domainnya. Meskipun demikian, maksimum atau minimum pada selang tertentu juga bisa menjadi nilai maksimum atau minimu global pada seluruh domain fungsinya.

Perhatikan gambar berikut ini,



Teorema A(Uji turunan pertama untuk ekstrim lokal).

Andaikan f kontinu pada selang terbuka $(a, b,)$ yang memuat titik kritis c, maka:

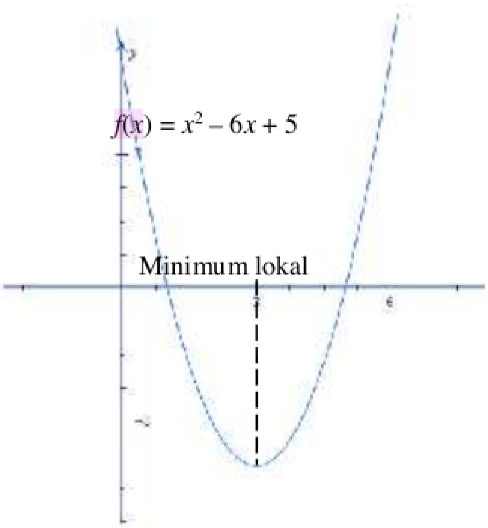
- Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b) maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
- Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c, b) maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.
- Jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c, maka $f'(x)$ bukan nilai ekstrim lokal f.

Contoh 1.

Cari nilai ekstrim local dari fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$ pada $(-\infty,\infty)$!

Penyelesaian:

Fungsi polinom f kontinu dimana-mana, dan turunan $f(x)$ adalah $f'(x) = 2x - 6$, ada untuk semua x. Jadi satu-satunya titik kritis untuk f adalah penyelesaian tunggal dari $f'(x) = 0$, yaitu $x = 3$.



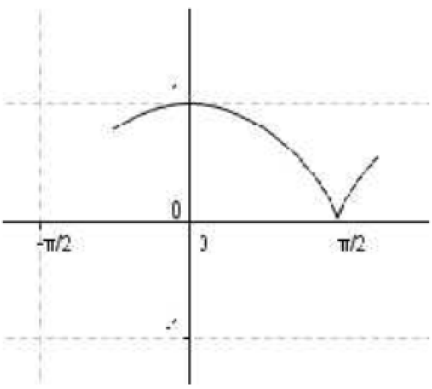
Karena $f'(x) = 2(x - 3) < 0$ utnuk $x < 3$, f turun pada $(-\infty, 3]$. Dan karena $2(x - 3) > 0$ untuk $x > 0$, f naik pada $[3, \infty)$. Oleh karena itu, menurut Uji Turunan Pertama, $f(3) = -4$ adalah nilai minimum lokal f. Karena 3 adalah satu-satunya bilangan kritis, tidak terdapat nilai ekstrim lain. Lihat grafik disamping.

Contoh 2.

Cari nilai ekstrim lokal dari $f(x) = (\cos x)^{2/3}$ pada $(-\pi/6, 2\pi/3)$

Penyelesaian.

Turunan pertama, $f'(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{-\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x}$



Perhatikan grafik disamping. Titik 0 dan $\pi/2$ adalah titik-titik kritis, karena $f'(0) = 0$ dan $f'(\pi/2)$ tidak ada. Sekarang $f'(x) > 0$ pada $(-\pi/6, 0)$ dan pada $(\pi/2, 2\pi/3)$, sedangkan $f'(x) < 0$ pada $(0, \pi/2)$. Menurut Uji Turunan Pertama kita simpulkan bahwa $f(0) = 1$ adalah nilai maksimum lokal dan bahwa $f((\pi/2) = 0$ adalah nilai minimum lokal. Lihat gambar di samping.

Selain uji turunan pertama kita juga bisa menggunakan uji turunan kedua untuk menentukan nilai maksimum dan minimum local. Hal ini dijamin oleh sebuah teorema berikut tentang nilai ekstrim.

Uji Turunan Kedua

Teorema B (Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal).

Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f'(c) = 0$ maka:

- Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f, dan
- Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

Contoh 3.

Gunakan Uji Turunan Kedua untuk mengenali ekstrim lokal pada

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian.

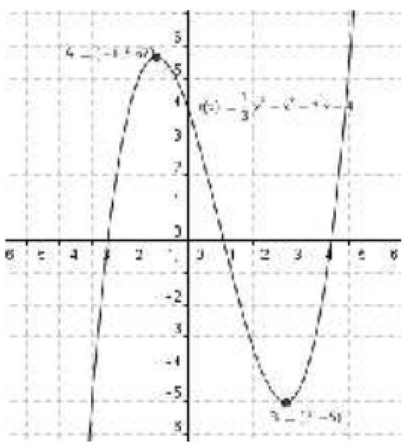
$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$ dan $f''(x) = 2$

Jadi, $f'(3) = 0$ dan $f''(3) > 0$. Karena itu, menurut Uji Turunan Kedua, $f(3)$ adalah nilai maksimum lokal.

Contoh 4.

Untuk $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, gunakan Uji Turunan Kedua untuk mendapatkan niali ekstrim!

Penyelesaian.



$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ dan $f''(x) = 2x - 2$. Titik-titik kritis adalah -1 dan 3 ($f'(-1) = f'(3) = 0$). Karena $f''(-1) = -4$ dan $f''(3) = 4$, maka menurut Uji Turunan Kedua bahwa $f(-1)$ adalah nilai maksimum lokal dan bahwa $f(3)$ adalah nilai minimum lokal.

Ekstrim pada selang terbuka.

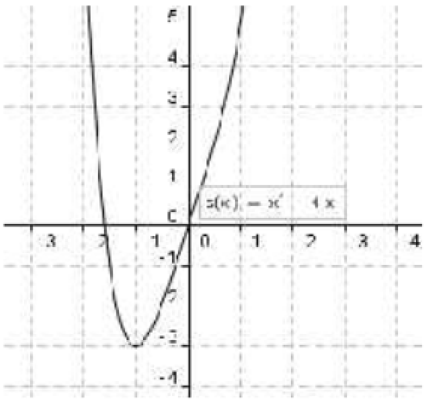
Kajian sebelumnya lebih banyak terkait dengan selang tertutup. Berikut akan diberikan contoh tentang nilai ekstrim pada selang terbuka.

Contoh 1.

Cari nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x^4 + 4x$ pada $(-\infty,\infty)$!

Penyelesaian.

$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x + 1)(x^2 - x + 1)$

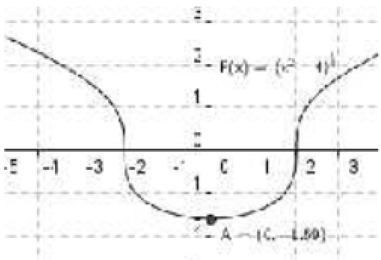


Karena $x^2 - x + 1 = 0$ karena definit positif, maka terdapat satu titik kritis, yaitu $x = -1$. Untuk $x < -1$, $f'(x) < 0$, sedang untuk $x > -1$, $f'(x) > 0$. Maka kita simpulkan bahwa $f(-1) = -3$ adalah nilai minimum lokal untuk f, dan karena f turun di sebelah kiri 1 dan naik di sebelah kanan 1, memang benar merupakan nilai minimum dari f, dan bahwa f tidak mempunyai nilai maksimum.

Contoh

Tentukan nilai ekstrim dari $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}$

Penyelesaian



Turunan pertama dari f adalah

$$f'(x) = \frac{2x}{3(x^2 - 4)^{2/3}}$$

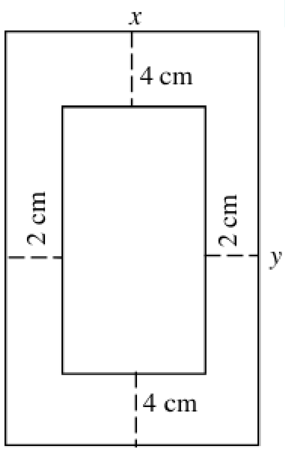
Jadi, $f'(x)$ bernilai 0, untuk $x = 0$, dan tidak ada untuk $x = \pm 2$, diketahui bahwa pada titik singularnya nilai f(2)=f(-2)=0. Jadi nilai ekstrim yang ada berupa nilai minimum local.

Masalah-masalah praktis

Contoh 2.

Sebuah surat selebaran memuat 50 cm persegi bahan cetak. Jalur bebas cetak diatas dan dibawah selebar 4 cm dan disamping kiri dan kanan selebar 2 cm (seperti terlihat pada gambar). berapa ukuran surat selebaran tersebut yang memerlukan kertas sedikit mungkin?

Penyelesaian.



Andaikan surat edaran mempunyai lebar x dan tinggi y, maka luasnya adalah:

$$A = xy$$

Dalam hal ini kita bermaksud meminimumkan A. A diungkapkan dalam bentuk dua variabel, yang kita tidak tahu solusinya seperti apa. Namun kita akan mencari sebuah persamaan yang mengaitkan x dan y sehingga salah satu dari variabel ini dapat dihilangkan. Ukuran bahan cetakan adalah $x - 4$ dan $y - 8$ dan luasnya adalah 50 cm^2. Sehingga $(x - 4)(y - 8) = 50$. Jika kita selesaikan persamaan ini untuk y, kita dapatkan:

$$y = \frac{50}{x-4} + 8$$

Dengan penggantian ungkapan ini untuk y dalam A = xy dihasilkan:

$$A = \frac{50x}{x-4} + 8x$$

Rentang niali x yang mungkin adalah $4 < x < \infty$; disini kita akan meminimumkan A pada selang terbuka $(4, \infty)$.

Maka,

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(x-4)50 - 50x}{(x-4)^2} + 8 = \frac{8x^2 - 64x - 72}{(x-4)^2} = \frac{8(x+1)(x-9)}{(x-4)^2}$$

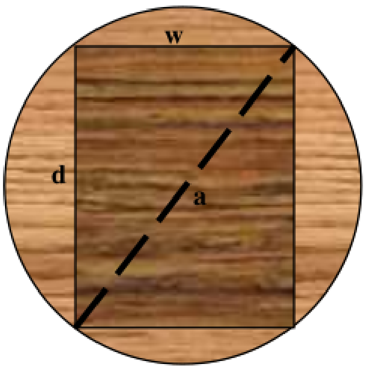
Titik kritis hanya diperoleh dengan menyelesaikan $dA/dx = 0$. Hal ini menghasilkan $x = 9$ dan $x = -1$. Kita tolak $x = -1$ karena tidak ada dalam selang $(4, \infty)$. Karena $dA/dx < 0$ untuk x dalam $(4, 9)$ dan $dA/dx > 0$ untuk x dalam $(9, \infty)$. Kita simpulkan bahwa A mencapai nilai minimumnya pada $x = 9$. Nilai ini membuat $y = 18$ (didapatkan dengan menggantikannya dalam persamaan yang mengaitkan x dan y). Sehingga ukuran surat edaran yang akan memakai kertas paling sedikit adalah 9 cm x 18 cm.

Contoh 3.

Sebuah balok kayu persegi-panjang harus dipotong dari sebuah gelondongan dengan penampang yang berbentuk lingkaran. Jika kekuatan balok sebanding dengan hasil kali lebar dan kuadrat tebarnya, tentukan ukuran penampang yang memberikan balok yang paling kuat.

Penyelesaian.

Nyatakan garis tengah gelondongan dengan a (konstanta) dan lebar dan tebal balok masing-masing dengan w dan d (lihat gambar). Kita bermaksud akan memaksimumkan S, kekuatan balok.



Dari persyaratan masalah,

$$S = kwd^2$$

Dengan k adalah konstanta perbandingan. Kekuatan S tergantung pada dua variabel w dan d, tetapi terdapat hubungan sederhana, yaitu:

$$d^2 + w^2 = a^2$$

Jika kita menyelesaikan persamaan ini untuk d^2 dan menggantikan ke dalam rumus untuk S, maka kita akan mendapatkan:

$$S = kw(a^2 - w^2) = ka^2w - kw^3$$

Kita lihat niali-nilai yang diperbolehkan untuk w adalah $0 < w < a$, sebuah selang terbuka. Untuk mencari titik kritis, kita hitung dS/dw, menetapkannya sama dengan 0, dan menyelesaikannya untuk w, sehingga:

$$\frac{dS}{dw} = ka^2 - 3kw^3 = k(a^2 - 3w^2)$$

$$k(a^2 - w^2) = 0 \text{ dengan } w = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

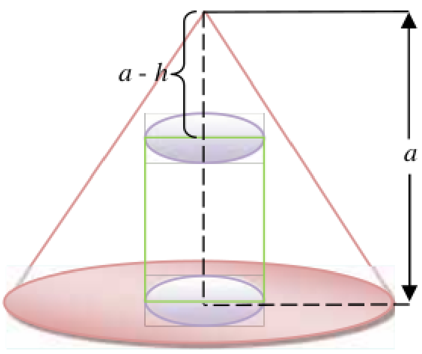
Karena $\frac{a}{\sqrt{3}}$ adalah titik kritis satu-satunya dalam $(0, a)$, kelihatannya akan memberikan nilai maksimum S. Pemeriksaan pada tanda dS/dw di kiri dan di kanan $\frac{a}{\sqrt{3}}$ akan menegaskan hal ini.

Jika kita menggantikan $w = \frac{a}{\sqrt{3}}$ dalam $d^2 + w^2 = a^2$, kita pahami bahwa $d = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. Ukuran yang diinginkan adalah $w = \frac{a}{\sqrt{3}}$ dan $d = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. Perhatika bahwa $d = \sqrt{2}w$.

Contoh 4.

Cari ukuran tabung lingkaran tegak yang volumenya sebesar mungkin yang dapat ditempatkan di dalam sebauh kerucut lingkaran tegak!

Penyelesaian.



Andaikan a tinggi dan b jari-jari alas kerucut yang diketahui (dua-duanya konstanta). Nyatakan dengan h, r, dan V masing-masing tinggi, jari-jari dan volume dari tabung yang dimasukkan.

Volume tabung adalah: $V = \pi r^2 h$

Dari segitiga-segitiga yang serupa didapat $\frac{a-h}{r} = \frac{a}{b}$ atau $h = a - \frac{a}{b}r$

Jika kita substitusikan h ke dalam rumus untuk V, maka:

$$V = \pi r^2 (a - \frac{a}{b} r) = \pi a r^2 - \pi \frac{a}{b} r^3$$

Kita ingin memaksimumkan V untuk r dalam selang $[0, b]$.

Dengan Uji Turunan Pertama pada $(0,b)$.

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi a r - 3\pi \frac{a}{b} r^2 = \pi a r(2 - \frac{3}{b} r)$$

Ini menghasilkan titik stasioner $r = 2b/3$, yang memberikan tiga titik kritis yang harus dilihat: 0, $2b/3$, dan b. Dengan adanya gambar diatas terlihat bahwa $r = 0$ dan $r = b$ yang keduanya memberikan volume 0. Jadi, $r = 2b/3$ akan memberikan nilai maksimum. Jika kitasubstitusikan nilai ini untuk r dalam persamaan yang menghubungkan r dan h, kita temukan bahwa $h = a/3$.

Diskusikan bagaimana langkah-langkah yang diambil dalam menentukan nilai ekstrim

SOAL LATIHAN

Gunakan turunan pertama untuk menentukan nilai ekstrim dari fungsi-fungsi berikut ini:

1. $f(t) = -2(t-1)(t+2)$
2. $f(s) = 2s^2 + 6s - 5$
3. $h(x) = ax^2 + bx + c$
4. $g(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$
5. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12$

6. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^{\frac{3}{2}}$
7. $f(x) = x^3\sqrt{x^2 - 1}$
8. $g(t) = t^2 \sin 2t$
9. $h(t) = |x^2 - x| + \frac{1}{|x-2|}$
10. $F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2}$

Gunakan turunan kedua untuk menentukan nilai ekstrim dari fungsi berikut ini

11. $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
12. $h(x) = x^2 \sin x$
13. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - 9}$
14. $f(t) = 5t^{\frac{3}{5}} - 2t^3$
15. $g(t) = t^2\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)$
16. $h(t) = \cos^2(2t)$
17. $f(x) = x^4 - 32x + 5$
18. $G(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
19. $f(x) = ax^n - nx$
20. $H(x) = -2x^4 + 4x^3 + 2x$
21. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = ax^2 + bx$ senantiasa naik dan cekung ke atas?
22. Seorang Ayah akan membeli kertas kado yang akan digunakan untuk membungkus kado ulang tahun anaknya. Kertas kado tersebut memiliki ukuran 75 x 90 cm^2 . Tentukan ukuran dari kado yang berbentuk silinder agar volumenya maksimum.
23. Pada ulang tahun perkawinan yang ke-11, keluarga tomy akan membuat kue ulang tahun pernikahan yang berbentuk piramida dengan alas persegi. Kue tersebut akan diberikan kepada 11 orang dengan masing-masing mendapatkan 11 cm^3. Tentukan ukuran kue agar luas permukaannya minimum.
24. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmetika yang jumlah ketiganya sama dengan 18, tentukanlah ketiga bilangan tersebut agar perkaliannya minimum.

MATERI 4.4 ANALISIS DAN SKETSA GRAFIK

Penggambaran Grafik Canggih

Penggambaran grafik seringkali menjadi permasalahan yang sulit. Baik di tingkat SMA maupun mahasiswa. Tersedianya software-softaware untuk menggambar grafik fungsi, di sisi lain memudahkan, akan tetapi disisi lain juga menimbulkan kurangnya kemampuan analisis dalam mengenali perilaku atau karakteristik dari fungsi tersebut.

Turunan pertama dan kedua membantu kita mengenali grafik terkait dengan, kemiringan, kecekungan, nilai minimum dan maksimum local. Limit di ketakhinggaan dan limit takhingga membantu kita mengenali asymptot grafik secara vertical dan horizontal.Hal lain yang diperlukan dalam penggambaran grafik adalah intercept atau titik potong pada salah satu atau kedua sumbu koordinatnya.

Kemiringan kurva yang ditentukan oleh gradient (atau turunan pertama) berkaitan dengan nilai dari turunan pertamanya.

Jika $f'(x) > 0$, maka $f(x)$ monoton naik

Jika $f'(x) < 0$, maka $f(x)$ monoton turun

Turunan kedua mengindikasikan kecekungan dari kurva.

Jika $f''(x) > 0$, maka $f(x)$ cekung ke atas

Jika $f''(x) < 0$, maka $f(x)$ cekung ke bawah.

Untuk lebih jelas perhatikan contoh-contoh berikut ini,

Contoh 1. Analisis dan sketsalah grafik dari $y = \dfrac{x^2 - 4}{2(x^2 - 1)}$

Penyelesaian

Pertama, kita lihat turunan pertamanya,

$$y' = \frac{2x(2x^2-2)-4x(x^2-4)}{4(x^2-1)^2} = \frac{4x^3-4x-4x^3+16x}{4(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{12x}{4(x^2-1)^2} = \frac{3x}{(x^2-1)^2}$$

Dengan demikian $f(x)$ naik jika $x>0$, $f(x)$ turun jika $x<0$

Turunan keduanya,

$$y'' = \frac{3(x^2-1)^2-4x(x^2-1)3x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{3x^4-6x^2+3-12x^4+12x^2}{(x^2-1)^4} = \frac{-9x^4+6x^2+3}{(x^2-1)^4} = \frac{-3(3x^4-2x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$

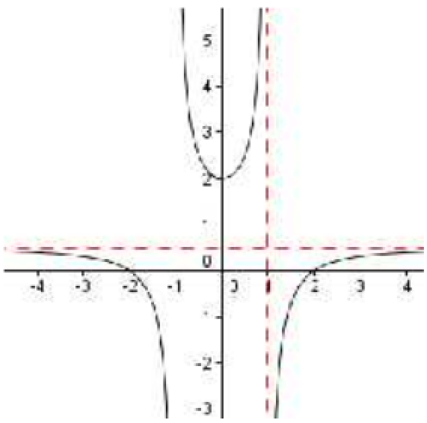
$$= \frac{-3(3x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{-3(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Jadi grafik cekung keatas pada (-1,1), cekung kebawah pada (-∞,-1) dan (1,∞).

Titik potong dengan sumbu y, (0, 2)

Titik potong dengan sumbu x, (-2,0) dan (2,0)

Asymptot vertical, x = -1 dan x = 1, karena



$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = -\infty, \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = \infty, \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = -\infty$$

Asymptot horizontal, y = ½ karena

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = \frac{1}{2}, \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = \frac{1}{2}$$

Titik kritis pada $x = 0$, karena $y'(0) = 0$

Domain fungsi, $x \neq \pm 1$, x di real.

Contoh 2

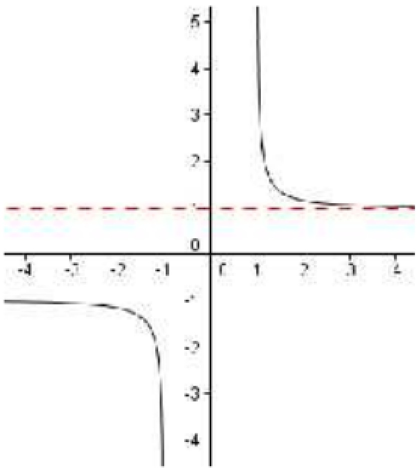
Analisis dan sketsalah grafik dari $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Penyelesaian

Turunan pertama,

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.2x.x}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1) - x^2}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Jadi, y turun untuk setiap x di real.



Turunan kedua,

$$y' = \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-2}.2x = \frac{3x}{(x^2 - 1)^2}$$

Jadi y cekung kebawah untuk $x < 0$ dan cekung keatas untuk $x > 0$

Tidak memiliki titik potong pada kedua sumbunya.

Asymptot vertical pada $x = \pm 1$

Asymptot horizontal pada y = ±1

Contoh 3

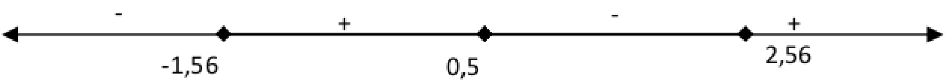
Analisis dan sketsalah grafik dari $y = ½ (x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12)$

Penyelesaian

Turunan pertama, $y' = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = (x - \frac{1}{2})(2x^2 - 2x - 8)$

Nilai $f\,'(x)$ dapat dicari dengan menggunakan persamaan kuadrat sehingga diperoleh pembuat nol-nya berikut ini

$$x = \frac{1}{2}, x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \approx 2{,}56, x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \approx -1{,}56$$



Jadi, f naik pada selang (-1,56,0,5) dan (2.56,∞)

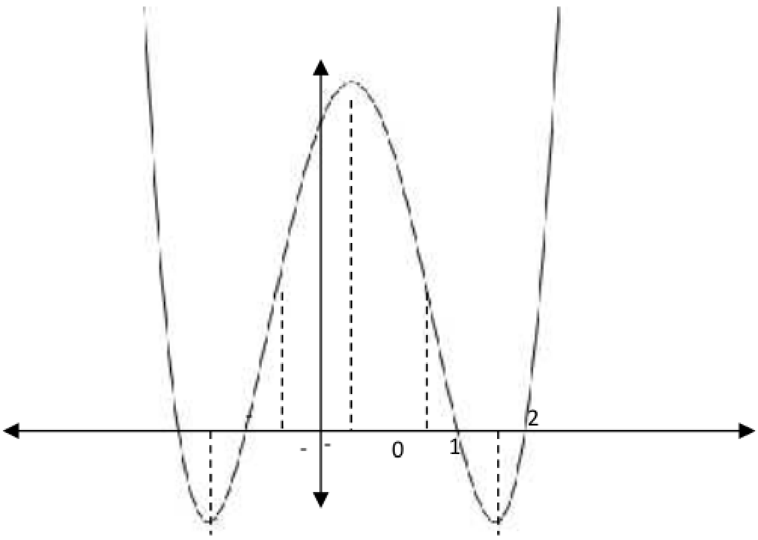
f turun pada selang (-∞, -1.56) dan (0.5,2.56)

Turunan Kedua, $y'' = 6x^2 - 6x - 7$ dengan pembuat 0 di

$$x = \frac{6 + \sqrt{204}}{12} \approx -0{,}69 \quad \text{dan} \quad x = \frac{6 - \sqrt{204}}{12} \approx 1{,}69$$

Jadi, f cekung keatas pada selang (-∞, -0.69) dan (1.69,∞)

f cekung kebawah pada selang (-0.69, 1.69)



Contoh 4

Analisis dan sketsa grafik dari $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

Penyelesaian

Turunan pertama,

$$f'(x) = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin x.\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\cos x}$$

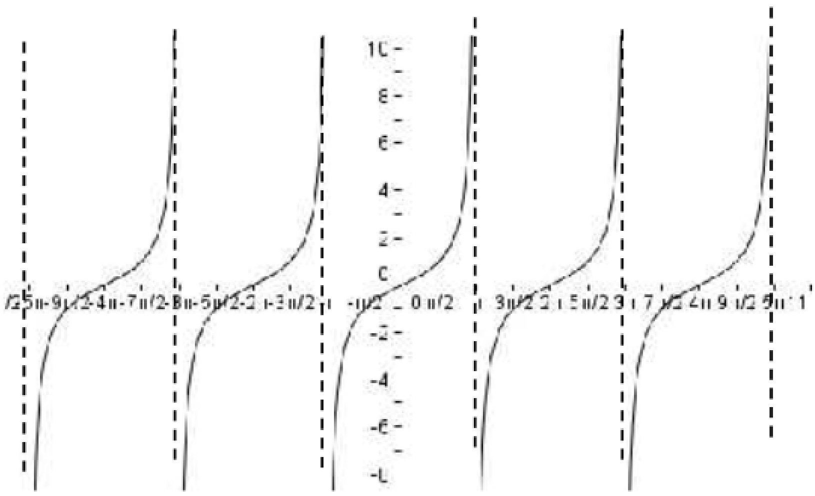
Jadi, f senantiasa naik kecuali di $\pi + \mathrm{k}.2\pi$

Turunan kedua,

$$f''(x) = -(1+\cos x)^{-2}.-\sin x = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

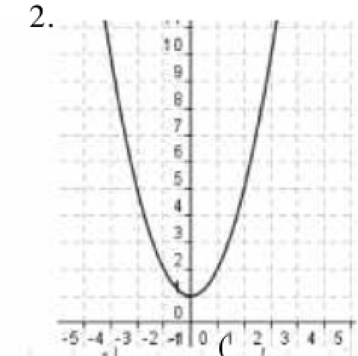
Jadi, f cekung keatas apabila $\sin(x) > 0$ atau $\pi + k.2\pi < x < (k+1)\,2\pi$, dengan k bulat.

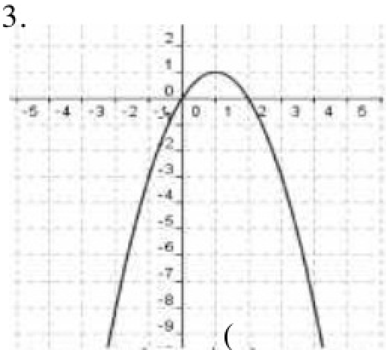
Asymptot vertical terjadi pada $x = \pi + k.2\pi$

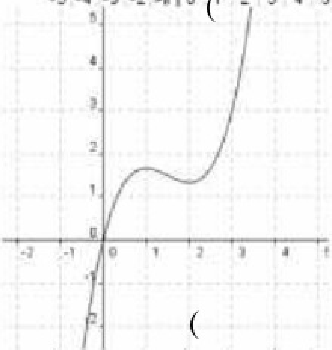


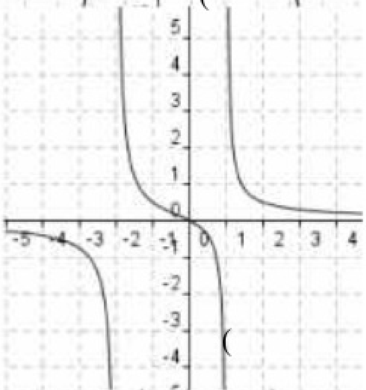
SOAL LATIHAN

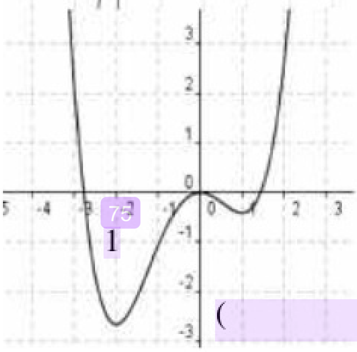
1. Tentukan selang dimana fungsi berikut naik atau fungsi turun

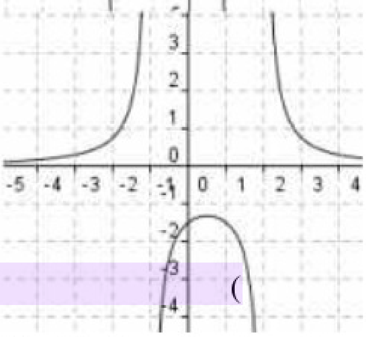
2. 

3. 









Tentukan selang dimana fungsi berikut naik, dan fungsi turun

2. $y = x^2 - 3x + 2$

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$

4. $g(x) = \left|x^2 - 1\right|$

5. $y = \dfrac{1}{\left|x^2 - x\right|}$

6. $f(t) = \sqrt{t^2 + t}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$

8. $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

9. $g(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 2$

Tentukan selang dan jenis kecekungan dari fungsi berikut

10. $y = x^2 - 5x + 1$

11. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2$

12. $h(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

13. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x(x+1)^2}$

Analisi Grafik berikut (naik, turun, kecekungan, asymptot jika ada, minimum dan maksimum lokal) kemudian sketsalah grafiknya

14. $f(x) = 27x - x^3$

15. $h(x) = x - \dfrac{1}{x - 1}$

16. $y = x\sqrt{x^2 - 4}$

17. $y = (x+2)^{\frac{2}{3}}$

18. $f(t) = \dfrac{t^2}{4t^2 - 16}$t

19. $f(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t - 1}$

20. $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$.

21. $f(t) = \dfrac{\sin t}{1 + \sin^2 t}$

22. $g(t) = \sin(t^2 - 1)$,pada selang(-π,π)

23. $h(t) = \dfrac{\sin t}{1 + \tan t}$

24. $f(\theta) = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

25. $f(x) = x^2 \sin^2 x$

MATERI 4.5 KECEPATAN, OPTIMASI DAN NILAI RATA-RATA

Masalah Kecepatan

Pendekatan turunan diperoleh dari permasalahan garis singgung dan kecepatan sesaat. Masuk akal sekali apabila penerapan turunan terdapat masalah kecepatan dapat dilakukan dengan baik. Masalah kecepatan tidak mesti terkait dengan benda bergerak. Pertumbuhan uang simpanan di bank, peluruhan radioaktif, pertumbuhan bakteri dan pertumbuhan penduduk merupakan bagian dari permasalahan kecepatan.

Kecepatan biasa didefinisikan dengan perubahan posisi terhadap perubahan waktu dalam mekanika. Tingkat pertumbuhan penduduk, pertumbuhan bakteri terhadap waktu dalam masalah populasi. Perubahan volume terhadap perubahan sisi sebuah bangun ruang dan sebagainya.

Perbandingan perubahan dua hal merupakan inti dari permasalahan kecepatan. Contoh berikut akan membuka wawasan kita tentang keterkaitan turunan dengan masalah kecepatan.

Contoh 1

Dua buah mobil, A dan B bergerak sehingga posisinya pada saat t detik masing-masing $s_A(t) = ½\ t^2 + 5t + 10$ dan $s_A(t) = \ t^2 + 2t + 10$. Tentukan

a. kecepatan kedua mobil pada saat 2,3 dan 5 detik
b. Mobil manakah yang lebih cepat?

Penyelesaian

a. $v_A = \frac{ds}{dt} = t + 5, v_B = \frac{ds}{dt} = 2t + 2$

Untuk mempermudah kita substitusikan dalam table berikut,

t	2	3	5
v_A	7	8	10
v_B	6	8	12

Dari table dapat dilihat bahwa sebelum detik ke-3 mobil A lebih cepat, pada saat t = 3 kedua mobil memiliki kecepatan yang sama.

b. untuk melihat mobil yang lebih cepat, maka

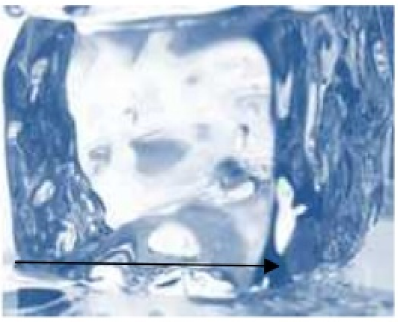
$$2t + 2 > t + 5$$
$$\Rightarrow t > 3$$

Setelah 3 detik mobil B lebih cepat.

Contoh 2

Sebuah es yang berbentuk kubus meleleh dengan kecepatan $\frac{dV}{dt} = -4cm^3 / dt$ Berapakah kecepatan perubahan sisinya terhadap waktu pada saat sisinya sama dengan 5 cm?.

Penyelesaian



Volume, $V = x^3$ dengan x panjang sisi. Berdasarkan aturan rantai kita akan dapatkan,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} . \frac{dx}{dt}$$

Dimana, $\frac{dV}{dt}$ = perubahan volume terhadap waktu

$\frac{dV}{dx}$ = perubahan volume terhadap panjang sisi

$\frac{dx}{dt}$ = perubahan sisi terhadap waktu

$$\frac{dV}{dt} = -4 = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = 3x^2\,\frac{dx}{dt}$$

$$-4 = 3x^2\,\frac{dx}{dt}$$

Jadi, $\frac{dx}{dt} = \frac{-4}{3x^2}$ sehingga $x'(5) = \frac{-4}{3.5^2} = \frac{-4}{75}\,cm/\sec$

Contoh 3

Pertumbuhan dari 500 bakteri dalam tiap jam-nya dinyatakan dalam persamaan,

$$P = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

Tentukanlah,

a. Pertumbuhan rata-rata pada t = 2
b. Kapan jumlah bakteri mencapai maksimum

Penyelesaian

$$\frac{dP}{dt} = 500\left(\frac{200 + 4t^2 - 8t^2}{(50 + t^2)^2}\right) = 500\left(\frac{200 - 4t^2}{(50 + t^2)^2}\right)$$

a. Jadi, pertumbuhan rata-rata pada saat t = 2 adalah

$$P'(2) = 500\left(\frac{200 - 4.4}{(50 + 4)^2}\right) = 500\left(\frac{184}{2916}\right) = 31{,}55 / \text{ jam}$$

b. Maksimum jumlah bakteri dicapai pada saat 00 – $4t^2 = 0$ atau $t^2 = 50$ dengan $t = 5\sqrt{2} \cong 7{,}07$ jam dengan jumlah bakteri sekitar 641 buah.

Masalah optimasi

Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan oleh kalkulus adalah masalah optimasi. Optimasi berkaitan sekali dengan nilai maksimum dan minimum. Solusi terbaik senantiasa diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan. Masalah keuntungan tertinggi dan biaya terendah, jarak terpendek adalah bagian dari optimasi.

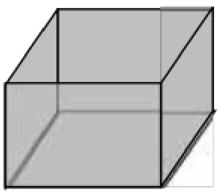
Sebelum mengkaji lebih jauh, marilah kita lihat contoh berikut

Contoh 1

Sebuah kotak **tanpa tutup** dengan alas persegi akan dibuat dari kertas manila dengan luas 75 cm^2. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum?

Penyelesaian

Sebagai ilustrasi perhatikan gambar berikut ini



Volume balok disamping adalah $V = x^2h$ yang merupakan fungsi tujuan kita untuk dimaksimumkan.

Sedangkan luas permukaannya adalah

$s(x) = x^2 + 4x.h = 75$ (Balok tanpa tutup) adalah sebuah keterbatasan yang ada.

Untuk memaksimumkan Volume maka akan lebih mudah untuk membuat volume menjadi sebuah persamaan yang terdiri dari satu variable. Sehingga kita bisa subtitusikan h, dimana

$$h = \frac{75 - x^2}{4x}$$

Kedalam rumus volumenya sedemikian sehingga,

$$V = x^2h = x^2.\frac{75 - x^2}{4x} = \frac{75x - x^3}{4}$$

Sebelum kita mencari nilai maksimumnya, maka kita lihat batasan dari fungsi dan variable, yakni $V \geq 0$, sedangkan batasan dari x adalah luas alas ≤ 75, dan $x \geq 0$, atau $0 \leq x \leq \sqrt{75}$.

Jadi, model matematisnya adalah maksimumkan $V = \frac{75x - x^3}{4}$ pada $[0, \sqrt{75}]$.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{75}{4} - \frac{3x^2}{4} = 0$$

$$75 = 3x^2$$

$$x^2 = 25$$

Jadi, $x = \pm 5$, jelas $x = -5$ tidak mungkin(diluar domain dari V). Dengan demikian ukuran kotak yang dibuat adalah,

Alas = 5cm, dan tinggi, h = 2,5 cm dengan Volume = $5^2(2,5) = 62,5$ cm^3.

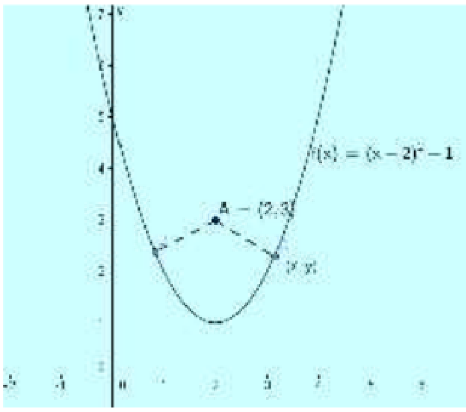
Untuk lebih menyakinkan, mari kita lihat perhitungan secar numeric beberapa ukuran yang mungkin

x	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
h	6.88	5.5	4.48	3.69	3.04	**2.5**	2.03	1.63	1.26	0.93	0.63
V	43	49.5	54.9	59	61.6	**62.5**	61.5	58.5	53.2	45.5	35.2

Contoh 2 (Jarak minimum)

Diketahui sebuah kurva $y = (x-2)^2 + 1$, tentukan jarak terpendek titik (2,3) terhadap kurva

Penyelesaian,



Untuk mempermudah perhatikan grafik berikut ini, Berdasarkan rumus jarak dari A ke kurva, $d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

Dengan mensubstitusikan,

$y = x^2 - 4x + 5$

(lihat fungsinya), maka

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + (x^2 - 4x + 2)^2}$$
$$= \sqrt{(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 3) + 2}$$
$$= \sqrt{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 12x + 2x^2 - 8x + 6 + 2}$$
$$= \sqrt{x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 20x + 8}$$

Karena domainnya untuk setiap x di real (tidak memiliki titik ujung), maka berdasarkan teorema titik kritis, nilai minimum ada di $d'(x) = 0$.

$$d'(x) = \frac{1}{2}\left(x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 20x + 8\right)^{-\frac{1}{2}} . (4x^3 - 24x^2 + 40x - 20)$$
$$= \frac{(4x^3 - 24x^2 + 40x - 20)}{2\sqrt{\left(x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 20x + 8\right)}}$$

Maka,

$$4x^3 - 24x^2 + 40x - 20 = 4(x^3 - 6x^2 + 10x - 5)$$
$$= 4(x-1)(x^2 - 5x + 5)$$

Sehingga diperoleh $d'(x) = 0$ untuk $x = 1; \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Dengan demikian titik pada kurva yang memberikan jarak terpendek adalah,

$$(1,1), \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

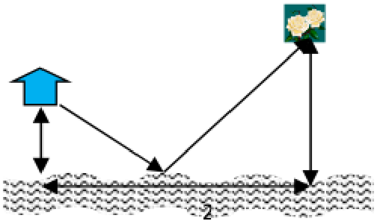
Sehingga jarak minimum dapat dilihat pada table berikut ini,

(x,y)	**(1,1)**	$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$,	$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$
d	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Jadi, jarak minimum (2,3) terhadap grafiknya adalah $\sqrt{3}$

Contoh 3 (**jarak minimum**)

Seseorang akan mengambil air dari sungai untuk menyiram tanaman. Perhatikan gambar berikut ini,



Tentukanlah jarak minimum yang ditempuh oleh orang tersebut.

Penyelesaian

Jarak yang ia tempuh adalah $L = y + z$, dimana berdasarkan teorema Pythagoras di peroleh,

$$L = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{15^2 + (25 - x)^2} = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{225 + 625 - 50x + x^2}$$

Dengan batas x adalah [0,25]

Jadi,

$$L' = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} + \frac{2x - 50}{\sqrt{850 - 50x + x^2}} = 0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} = \frac{50 - 2x}{\sqrt{850 - 50x + x^2}}$$

Dengan menguadratkan kedua ruasnya, kita peroleh,

$$x^2(850 - 50x + x^2) = (2500 - 200x + x^2)(25 + x^2)$$

$$850x^2 - 50x^3 + x^4 = 62500 - 5000x + 2525x^2 + x^4$$

$$50x^3 + 1675x^2 - 5000x + 62500 = 0$$

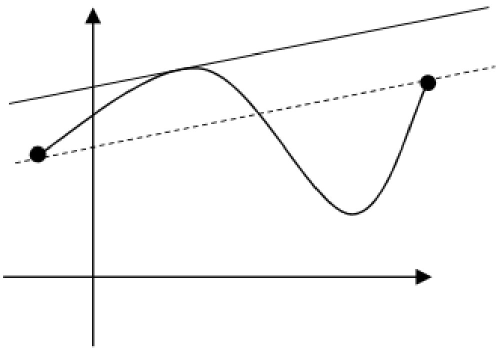
$$2x^3 + 67x^2 - 200x + 2500 = 0$$

Secara numeric diperoleh x = 9,09554831.

Berbagai aplikasi lain dapat juga dilakukan, terlebih lagi terkait dengan nilai maksimum dan minimum, baik dalam matematika (nilai maksimum dan minimum), Ekonomi (biaya minimum dan keuntungan maksimul), masalah antrian, dll.

Teorema Nilai Rata-Rata

Perhatikan grafik berikut ini,



Gambar disamping merupakan grafik dari sebuah fungsi kontinu pada selang (A, B). Paling sedikit ada satu titik C sehingga garis singgung di titik C sejajar dengan garis yang melalui A dan B. Kasus ini dikenal dengan nama **nilai antara.**

Teorema: Teorema Nilai Antara untuk Turunan

Jika f kontinu pada selang tertutup [a, b] dan terdefferesialkan pada selang tersebut (a, b), maka terdapat paling sedikit satu bilangan c di (a, b) dimana,

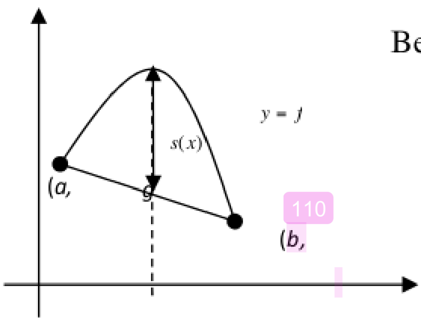
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Yang ekuivalen dengan,

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Bukti

Untuk membuktikannya, marilah kita lihat grafik berikut ini,



Berdasarkan gambar kita tahu bahwa s(x) = f(x) – g(x). dimana $g(x)$ adalah persamaan garis yang melalui titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Jadi,

$$g(x)-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Sehingga rumus dari $s(x)$ adalah

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Maka, $s(a) = s(b) = 0$ untuk sebuah x di (a, b).

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sebuah observasi yang penting. Jika kita tahu bahwa ada c di (a,b) yang memenuhi s'(x) = 0. Kalau kita tahu, maka persamaan terakjir sangat mudah dipahami,

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ekuivalen dengan kesimpulan dari teorema di atas.

Untuk melihat nilai s'(c) = 0 untuk suatu c di (a,b) alasan berikut dapat digunakan. $S(x)$ kontinu pada $[a,b]$ karena berasal dari perbedaan dua fungsi yang kontinu. Berdasarkan teorema eksisttensi minimum dan maksimum, maka s mungkin nilai minimum dan minimum pada $[a,b]$. Jika kedua nilai 0 maka tentulah $s(x) = 0$ yang berimplikasi pada $s'(x) = 0$ untuk semua x di (a, b).

Apabila kedua nilai, minimum dan maksimum berbeda, maka ada nilai yang diperlukan di c, sehingga $s(a) = s(b) = 0$. Jadi, s memiliki turunan di setiap titik di (a,b) dan berdasarkan teorema titik kritis, maka $s'(c) = 0$.

Contoh 1

Tentukan nilai c yang sehingga untuk fungsi $f(x) = 2\sqrt{2x}$ pada [2,8] berlaku teorema nilai rata-rata.

Penyelesaian

$$f'(x) = 2.\frac{1}{2}x^{-1/2}.2 = 2x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{2x}}$$

Dan,

$$\frac{f(8)-f(2)}{8-2}=\frac{4-2}{6}=\frac{2}{3}$$

Jadi, kita tinggal menyelesaikan

$$\frac{2}{\sqrt{2c}}==\frac{2}{3}\Rightarrow \sqrt{2c}=3\Rightarrow c=\frac{9}{2}$$

Contoh 2

Misalkan $f(x)=x^3-x^2+2x$ pada [-1,2]. Tentukan semua nilai c sedemikian sehingga memenuhi teorema nilai antara.

Penyelesaian

Turunan fungsi f adalah

$$f'(x)=3x^2-2x+2$$

Dan,

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{8-4+4-(-1-1-2)}{3}=\frac{8+4}{3}=4$$

Sehingga, kita mesti menyelesaikan,

$$3c^2-2c+2=4$$

$$(3c^2-2c-2)=0\Rightarrow c=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$

Jadi, diperoleh c ≅ -0,55 dan c ≅ 1,22.

Pada teorema berikutnya kita akan melihat hubungan turunan dari dua buah fungsi.

Teorema B

Jika $F'(x)$ = $G'(x)$ untuk semua x di (a,b), maka terdapat konstanta C sedemikian sehingga,

$$F(x)=G(x)+\mathrm{C}$$

Untuk semua x di (a,b)

Bukti

Misalkan $H(x) = F(x) - G(x)$, maka

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

Untuk semua x di (a,b). pilih x_1, untuk sejumlah titik di (a,b) dan misalkan x titik lain. Fungsi H memenuhi teorema nilai antara pada interval tertutup dengan x_1 dan x sedemikian sehingga

$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Tetapi $H'(c) = 0$, sehingga $H(x) - H(x_1) = 0$ atau $H(x) = H(x_1)$ untuk semua x di (a,b). Karena $H(x) = F(x) - G(x)$, kita simpulkan bahwa $F(x) - G(x) = H(x_1)$. Jadi misalkan $C = H(x_1)$ maka kita simpulkan $F(x) = G(x) + C$.

Aturan L'Hopital

Salah satu cara untuk menentukan nilai limit fungsi rasional adalah dengan aturan L'Hopital. Bahkan menjadi salah satu cara yang paling sering digunakan untuk menentukan nilai limit dibandingkan dengan metode lain, seperti manipulasi aljabar dengan pemfaktoran dan perkalian suku sekawan. Syarat berlakunya aturan ini pun tidaklah rumit. Sama halnya pada penentuan nilai limit fungsi rasional dengan metode lainnya.Berikut ini akan diberikan teorema yang dimaksud.

Teorema

Misalkan $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$ dan misalkan f, g adalah fungsi yang memenuhi,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

Dan f' dan g' ada pada (a,b) dengan $g'(x) \neq 0$ pada (a,b). andaikan pula

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \text{ maka } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Bukti

Berdasarkan definisi dari limit, maka ada $c < b$ sedemikian sehingga jika t > c, maka, $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ambil x, y sedemikian sehingga $c < x < y < b$. berdasarkan teorema nilai rata-rata terdapat t $\in$ (x,y) sedemikian sehingga

$g'(t)(f(x) - f(y)) = f'(t)(g(x) - g(y))$ f

Karena g'(s) $\neq$ 0 untuk semua s di (a,b). Ini mengakibatkan bahwa g(x) – g(y) $\neq$ 0. Selanjutnya,

$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$ .Karena, t > c. $\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Untuk y $\rightarrow$ b^-, maka $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| . \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ karena c sembarang.

Akibat

Misalkan $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$ dan misalkan f, g adalah fungsi yang memenuhi,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

Dan *f'* dan *g'* ada pada (*a*,*b*) dengan *g'*(*x*) $\neq$ 0 pada (a,b). andaikan pula

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{, maka } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Bukti: dapat dilakukan dengan cara yang sama

Berikut akan diberikan beberapa contoh penggunaan teorema L'Hopital untuk menentukan nilai limit.

Contoh 3 Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin 3x}{\tan 7x}$

Penyelesaian

Karena pembilang dan penyebut menujuke-0 dan turunannya tidak nol di sekitar $x = 0$.

Jadi,

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin 3x}{\tan 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 + 3\cos 3x}{7\sec^2 7x} = \frac{8}{7}$$

Contoh 4 Tentukan nilai limit dari $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2}$

Penyelesaian

Karena penyebut dan pembilang bernilai 0 di h menuju ke-0, maka aturan L'Hopital dapat kita gunakan. Sehingga,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin(h)}{2h}$$

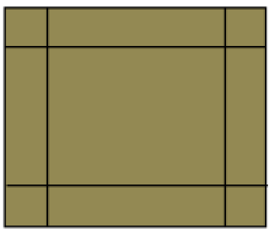
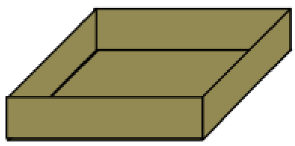
Karena bentuk terakhir masih bernilai 0/0, maka kita gunakan L'Hopital sekali lagi,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin(h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cos(h)}{2} = -\frac{1}{2}$$

SOAL LATIHAN

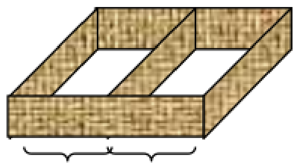
1. Dua mobil, A dan B, bergerak dengan kecepatan masing-masing 40km/jam dan 50 km/jam setelah keduanya bertemu. Mobil A bergerak kearah utara, sedangkan B bergerak kearah barat. Berapa cepat perubahan jarak antar keduanya pada saat A sejauh 3 km dan B sejauh 4 km dari awal pertemuan keduanya.
2. Sebuah balon dipompa sehingga volume berubah sebesar 11 cm^3/dt. Berapakah kecepatan perubahan jari-jari balon pada saat jari-jarinya sama dengan 3 cm.
3. Sebuah kubus memiliki panjang sisi yang bertambah 3 cm per detik. Berapakah perubahan volume kubus pada saat sisinya 12 cm.

4. Sebuah benda bergerak sehingga posisinya pada saat t detik adalah $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ meter.
   (a) Kapan benda bergerak kekiri
   (b) Berapakah percepatannya pada saat kecepatannya 0.
   (c) Kapan percepatannya positif
5. Sebuah benda ditembakkan keatas dengan kecepatan awal 128m/dt. Tinggi pada saat t dinyatakan dengan $h(t) = 128t - t^2$ m.
   (a) Kapan tingginya maksimum dan berapakah tingginya
   (b) Kapan benda bergerak kembali ke tanah dan berapakah kecepatannya
6. Halaman sebuah buku memuat 27 cm^2 untuk ditulis, apabila margin atas dan bawah 2 cm, sedangkan margin lainnya 1 cm. Berapakah ukuran minimal kertas yang dibutuhkan.
7. Sebuah titik (x,y) bergerak menyusuri elips $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Jika $\frac{dx}{dt} = 2$, berapakah $\frac{dx}{dt}$ pada titik (2,3).
8. Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari karton yang berukuran 24 x 24 cm^2 dengan memotong persegi dari masing-masing pojoknya. Lihat gambar berikut,

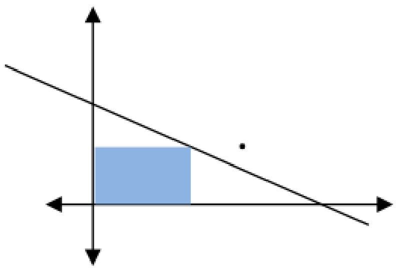
(a) Tentukanlah volume kotak yang dinyatakan dalam x
(b) Berapakah ukuran kotak agar volumenya maksimum

9. Tentukan keliling minimum dari sebuah persegipanjang apabila luasnya 48 cm^2
10. Seorang peternak kambing akan memagari dua buah kandang yang akan dibuat berdampingan.



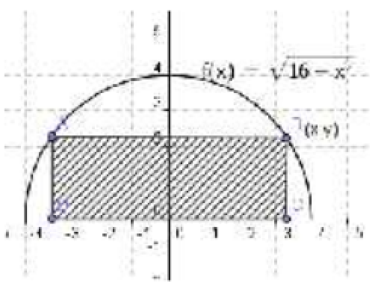
Berapakah ukuran kandang yang dibuat agar kawat sepanjang 400 m dapat memagari luas yang maksimum.

11. Perhatikan gambar berikut ini,



Tentukanlah titik (x, y) agar luas persegipanjangnya maksimum.

12. Tentukanlah dua bilangan apabila jumlahnya 75 dan hasil kalinya maksimum
13. Tiga buah bilangan mempunyai jumlah 123, duah diantaranya berselisih 2, tentukanlah nilai maksimum dari perkalian ketiga bilangan tersebut.
14. Tentukanlah luas maksimum dari persegipanjang yang diarsir berikut ini,



15. Sebuah perusahaan manufaktur ponsel memiliki biaya produksi (C), penghasilan (R) dan Keuntungan (P) yang dinyatakan terhadap jumlah ponsel sebagai berikut;

$$C = 5000 + 2x, \quad R = 10x - \frac{x_2}{1000}, \quad P = R - C$$

Dimana x menunjukkan jumlah ponsel yang diproduksi tiap minggu. Jika rata-rata produksi meningkat 500 radio perminggu pada saat jumlah produksi 2000. Hitunglah rata-rata peningkatan biaya, penghasilan dan keuntungannya.

16. Dua buah partikel bergerak mengikuti garis kordinat kartesius. Posisi pada saat t dinyatakan masing-masing $x = 4t - 3t^2$ dan $y = t^2 - 2t$.
    (a) Kapan keduanya memiliki kecepatan yang sama
    (b) Kapan keduanya memiliki posisi yang sama (jaraknya dari titik asal)

Tentukanlah nilai limit berikut ini dengan menggunakan aturan L'Hopital

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x}$
18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{2\cos x - 1}$
19. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cos^2 x - \sin x - 1}{2x^2}$
20. $\lim\limits_{t \to \pi/2} \dfrac{\sin t - 1}{\cos t - t + \frac{\pi}{2}}$
21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n}{\sin^n x}$
22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
23. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cos^2 t - 1}{\tan 3t}$
24. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{(t^2 + 1)\sin 2t}{\cos 2t - 1}$

Kalkulus turunan

ORIGINALITY REPORT

30%	29%	10%	8%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	www.slideshare.net Internet Source	3%
2	repository.usd.ac.id Internet Source	2%
3	repository.syekhnurjati.ac.id Internet Source	2%
4	repository.unpas.ac.id Internet Source	1%
5	elib.unikom.ac.id Internet Source	1%
6	id.scribd.com Internet Source	1%
7	mecca.org Internet Source	1%
8	elearning.sman1pekanbaru.sch.id Internet Source	1%
9	www.scribd.com Internet Source	1%
10	pt.scribd.com Internet Source	1%

11	eprints.umm.ac.id Internet Source	1 %
12	pt.slideshare.net Internet Source	1 %
13	milamashuri.wordpress.com Internet Source	1 %
14	ipitsopiyati.wordpress.com Internet Source	<1 %
15	lanoswww.epfl.ch Internet Source	<1 %
16	fenicahyaningsih.wordpress.com Internet Source	<1 %
17	الفوزان ، محمد بن براك. "الوجيز في نظام خدمة الأفراد السعودي", Library of Law and Economics, 2011. Publication	<1 %
18	sertifikasiguru.unm.ac.id Internet Source	<1 %
19	www.coursehero.com Internet Source	<1 %
20	Yunzhi Zou. "Single Variable Calculus", Walter de Gruyter GmbH, 2018 Publication	<1 %
21	es.scribd.com Internet Source	<1 %
22	ikayunitasari.wordpress.com Internet Source	<1 %

23	hdl.handle.net Internet Source	<1%
24	nengintanmsari.wordpress.com Internet Source	<1%
25	www.apav.it Internet Source	<1%
26	anzdoc.com Internet Source	<1%
27	singgihginanjaruntirta.blogspot.com Internet Source	<1%
28	إبن قيم الجوزية ، شمس الدين أبو عبد الله محمد بن أبي بكر بن أيوب الدمشقي ، 691 - 751 هـ.. "حاشية إبن القيم على سنن أبي داود : الجزء الحادي عشر", Turath For Solutions, 2013. Publication	<1%
29	id.123dok.com Internet Source	<1%
30	Submitted to uva Student Paper	<1%
31	azorsambene.blogspot.com Internet Source	<1%
32	fentifatimah.wordpress.com Internet Source	<1%
33	www.math.ufl.edu Internet Source	<1%

34	academics.tjhsst.edu Internet Source	<1%
35	halapa.com Internet Source	<1%
36	etrirahmawati.wordpress.com Internet Source	<1%
37	teknikelektronika.com Internet Source	<1%
38	Claudio Canuto, Anita Tabacco. "Analisi matematica I", Springer Science and Business Media LLC, 2005 Publication	<1%
39	homepage.sns.it Internet Source	<1%
40	www.math.itb.ac.id Internet Source	<1%
41	dwilestariningsih2a.wordpress.com Internet Source	<1%
42	www.wdjoyner.net Internet Source	<1%
43	student.gjszlin.cz Internet Source	<1%
44	fr.scribd.com Internet Source	<1%
45	www.studuj-jinak.cz Internet Source	<1%

46	sarahmeysara.blogspot.com Internet Source	<1%
47	rusdysetiyono11.blogspot.com Internet Source	<1%
48	units.maths.uwa.edu.au Internet Source	<1%
49	indahmachmud.blogspot.com Internet Source	<1%
50	nenglia08.wordpress.com Internet Source	<1%
51	kk.mercubuana.ac.id Internet Source	<1%
52	adinegara.com Internet Source	<1%
53	Submitted to Cardiff University Student Paper	<1%
54	Submitted to apeiron-uni Student Paper	<1%
55	slideplayer.info Internet Source	<1%
56	fahitah.wordpress.com Internet Source	<1%
57	www.math.nagoya-u.ac.jp Internet Source	<1%

58	tvschool.alazhar-cibubur.sch.id Internet Source	<1 %
59	www.smkbinamitra.sch.id Internet Source	<1 %
60	www.cs.widener.edu Internet Source	<1 %
61	ocw.upj.ac.id Internet Source	<1 %
62	www.seminarskirad.biz Internet Source	<1 %
63	ariezvanjava.blogspot.com Internet Source	<1 %
64	srinuryani.wordpress.com Internet Source	<1 %
65	Submitted to hac Student Paper	<1 %
66	undiksha.ac.id Internet Source	<1 %
67	cdd.gotevot.edu.sa Internet Source	<1 %
68	documents.mx Internet Source	<1 %
69	idoc.pub Internet Source	<1 %

katibstock.com

70	Internet Source		<1%
71	Submitted to essex Student Paper		<1%
72	Submitted to Harding Academy of Memphis Student Paper		<1%
73	de.scribd.com Internet Source		<1%
74	lailatulinayah.wordpress.com Internet Source		<1%
75	lindamath.wordpress.com Internet Source		<1%
76	Submitted to University of Muhammadiyah Malang Student Paper		<1%
77	macs02.mathcs.citadel.edu Internet Source		<1%
78	125.160.17.21:5432 Internet Source		<1%
79	valle.fciencias.unam.mx Internet Source		<1%
80	P. E. M. Borm, R. Cao, I. García-Jurado. "Maximum likelihood equilibria of random games", Optimization, 1995 Publication		<1%
	yudacreativity1933.blogspot.com		

81	Internet Source	<1%
82	John von Neumann. "Functional Operators (AM-21), Volume 1", Walter de Gruyter GmbH, 1950 Publication	<1%
83	www.statpt.com Internet Source	<1%
84	www.math.ncku.edu.tw Internet Source	<1%
85	www.dmfa.si Internet Source	<1%
86	www.zum.de Internet Source	<1%
87	staff.chardon.k12.oh.us Internet Source	<1%
88	supermath.info Internet Source	<1%
89	www.pwschool.ac.th Internet Source	<1%
90	www.phschool.com Internet Source	<1%
91	dananne.org Internet Source	<1%
92	dedi.staf.upi.edu Internet Source	<1%

93	www.stachemistry.com Internet Source	<1%
94	ratnawiningsih.wordpress.com Internet Source	<1%
95	www.whitman.edu Internet Source	<1%
96	Submitted to University of Birmingham Student Paper	<1%
97	file.upi.edu Internet Source	<1%
98	repository.uin-suska.ac.id Internet Source	<1%
99	Submitted to tsu Student Paper	<1%
100	rilwanussuyudi.blogspot.com Internet Source	<1%
101	Oscar Fernandez. "Calculus Simplified", Walter de Gruyter GmbH, 2019 Publication	<1%
102	cims.nyu.edu Internet Source	<1%
103	Submitted to Scotch College Student Paper	<1%
104	josbrigultom.blogspot.com Internet Source	<1%

105	Submitted to King Saud University Student Paper	<1%
106	Submitted to University of Wales Swansea Student Paper	<1%
107	www.themathpage.com Internet Source	<1%
108	Mozart W. Talakua, Stenly J. Nanuru. "TEOREMA REPRESENTASI RIESZ–FRECHET PADA RUANG HILBERT", BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 2011 Publication	<1%
109	www.angelo.edu Internet Source	<1%
110	repository.radenintan.ac.id Internet Source	<1%
111	www.aerostudents.com Internet Source	<1%
112	Cece Kustiawan. "KEKONTINUAN FUNGSI PADA RUANG METRIK", Infinity Journal, 2013 Publication	<1%
113	eprints.iain-surakarta.ac.id Internet Source	<1%
114	edoc.pub Internet Source	<1%

115	ml.scribd.com Internet Source	<1%
116	triseptia.wordpress.com Internet Source	<1%
117	examencommissie.be Internet Source	<1%
118	Submitted to (school name not available) Student Paper	<1%
119	www.bke.hu Internet Source	<1%
120	apav.it Internet Source	<1%
121	Submitted to Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya Student Paper	<1%
122	Submitted to Turun yliopisto Student Paper	<1%
123	analysis.hoseo.ac.kr Internet Source	<1%
124	www.ptmat.fc.ul.pt Internet Source	<1%
125	dwidamayanti26.wordpress.com Internet Source	<1%
126	anomfajar.blogspot.com Internet Source	<1%

127	www.mmrc.iss.ac.cn	Internet Source	<1%
128	en.wikibooks.org	Internet Source	<1%
129	www.math.byu.edu	Internet Source	<1%
130	cs.widener.edu	Internet Source	<1%
131	amath.doshisha.ac.jp	Internet Source	<1%
132	Submitted to University of Utah	Student Paper	<1%
133	www.ed.gov.nl.ca	Internet Source	<1%
134	www.de.unifi.it	Internet Source	<1%
135	www.tsisoa.com	Internet Source	<1%
136	repository.ipb.ac.id	Internet Source	<1%
137	www.gummy-stuff.org	Internet Source	<1%
138	studfile.net	Internet Source	<1%

shiraicursos.com

139	Internet Source	<1%
140	www.math4all.nl Internet Source	<1%
141	users.dimi.uniud.it Internet Source	<1%
142	www.jiskha.com Internet Source	<1%
143	mafiadoc.com Internet Source	<1%
144	www.math.tamu.edu Internet Source	<1%
145	myzeinulblog.blogspot.com Internet Source	<1%
146	awaltekhnology.blogspot.com Internet Source	<1%
147	www.maths.ucd.ie Internet Source	<1%
148	tim.ioe.edu.np Internet Source	<1%
149	fr.slideshare.net Internet Source	<1%
150	kulyawati.wordpress.com Internet Source	<1%
151	docobook.com	

Internet Source

<1%

152 sdo.iriit.irk.ru
Internet Source

<1%

153 hafidzeducation.files.wordpress.com
Internet Source

<1%

154 Submitted to Leeds Metropolitan University
Student Paper

<1%

155 www.textbooksonline.tn.nic.in
Internet Source

<1%

156 Submitted to bne-catholic
Student Paper

<1%

157 repo.unand.ac.id
Internet Source

<1%

158 الفوزان ، محمد بن براك. "الوجيز في نظام خدمة الأفراد السعودي",
Publication

<1%

159 Robert Magnus. "Fundamental Mathematical Analysis", Springer Science and Business Media LLC, 2020
Publication

<1%

160 إبن قيم الجوزية ، شمس الدين أبو عبد الله محمد بن أبي بكر بن أيوب الدمشق.... "حاشية إبن القيم على سنن أبي داود : الجزء الحادي عشر",
Publication

<1%