

BAB I PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang dalam matematika yang membahas mengenai graf. Graf sendiri merupakan aturan yang menghubungkan antara titik (*vertex*) ke garis (*edge*) dengan pemetaan *source* (daerah asal/pangkal), $s: E \rightarrow V$ dan pemetaan *target* (daerah hasil/ujung), $t: V \rightarrow E$. Teori graf secara tidak sengaja dikembangkan oleh Leonhard Euler dimana pada waktu itu Euler sedang mencoba memecahkan masalah jembatan Königsberg pada tahun 1735. Kemudian seiring berkembangnya zaman, di tahun 1857 matematikawan William Rowan Hamilton membuat *puzzle* yang memerlukan cara untuk menemukan jenis-jenis khusus dari lintasan, yang sekarang dikenal dengan sirkuit Hamilton.

Didukung dengan lahirnya teori representasi yang berguna untuk memudahkan mempelajari suatu objek matematika yang kompleks dengan cara merepresentasikannya menjadi objek sederhana. Sekitar tahun 1940 muncul ide merepresentasikan aljabar ke dalam bentuk graf yang kemudian sangat berkembang pesat di tahun 1970-an. Namun, ada satu kajian paling populer yang mencakup aljabar dengan teori graf, yaitu Quiver.

Istilah “Quiver” pertama kali dicetuskan oleh Peter Gabriel pada papernya yang berjudul *Unzerlegbare Darstellungen I*. Pada halaman awalnya, Peter Gabriel menuliskan bahwa, “Untuk sebuah pasangan 4 tupel $n_k, s_k: F(K) \xrightarrow{\quad} P(K)$, kami mengusulkan istilah quiver (*Köcher*) ketimbang graf, karena sudah banyak pengertian yang melekat pada kata tersebut”, (Gabriel, 1972).

Secara konsep quiver dan graf berarah adalah sama, namun secara matematis quiver merupakan graf berarah yang terdiri dari pasangan dan himpunan yaitu Q_0 yang memuat titik (*vertex*) dan Q_1 yang memuat panah (*edge*) serta memiliki dua pemetaan $s, t: Q_1 \rightarrow Q_0$ yang memetakan setiap panah $\alpha \in Q_1$ ke titik asalnya yaitu $s(\alpha)$ dan ke titik targetnya $t(\alpha)$ di Q_0 . (Kurniawan, 2016)

Dengan munculnya istilah quiver ini maka menambah khasanah baru mengenai teori representasi dari aljabar berdimensi hingga. Sehingga muncul bahasan baru yang lebih kompleks seperti representasi quiver (Gabriel, 1972), aljabar lintasan KQ , aljabar Hall dan grup quantum (Ringel, 1990), aljabar Lie (Kac, 1990), varietas quiver (Nakajima, 1994), serta bahasan baru seperti aljabar cluster (Sergey Formin, 2002),

Tidak hanya menjadi bahasan dalam ranah teori representasi dari aljabar berdimensi hingga. Quiver juga menjadi bahasan menarik dalam kajian teori kategori. Sehingga banyak kajian mengenai quiver dalam sudut pandang kategori. Begitu juga dengan representasi quiver. Representasi quiver dipandang sebagai "*small category*" dalam bahasan teori kategori. Walaupun demikian representasi quiver juga dibahas dalam ruang lingkup teori representasi dari aljabar berdimensi hingga, salah satunya berkaitan dengan aljabar lintasan KQ .

Dari segi aljabar, representasi quiver dapat didefinisikan sebagai representasi $(V = (V_i, f_a))$ dari suatu quiver Q adalah himpunan ruang vektor $\{V_i \mid i \in Q_0\}$ bersama dengan himpunan pemetaan linier $\{f_a: V_{s(a)} \rightarrow V_{t(a)} \mid a \in Q_1\}$, dimana Q_0 dan Q_1 merupakan himpunan titik dan himpunan panah dari Q . Dengan kata lain representasi quiver dapat diartikan sebagai penempatan ruang vektor pada setiap titik-titik dari quiver Q dan pemetaan linier pada setiap panah-panahnya. Maka sebuah representasi quiver yang tidak memiliki subrepresentasi sejati selain nol disebut representasi quiver sederhana.

Penelitian sebelumnya pernah membahas mengenai representasi quiver sederhana beserta sifat-sifatnya. Penelitian ini dibahas oleh Vika Yugi Kurniawan (2016) dalam jurnalnya yang berjudul sifat-sifat representasi quiver sederhana. Namun, dalam penelitian ini terdapat kekurangan.

Kekurangan pertama, dalam mendefinisi representasi quiver, jurnal ini tidak mendetailkan cara penulisan representasi quiver menggunakan konsep himpunan sesuai definisinya. Padahal himpunan merupakan objek yang paling mudah untuk dipahami oleh orang awam ketika mengambil / mempelajari topik ini. Kekurangan kedua, pembuktian mengenai teorema representasi quiver sederhana jika dan hanya jika representasi quiver memenuhi bentuk $S(i)$ hanya menggunakan

satu istilah saja yaitu dengan memanfaatkan keberadaan *sink*. Sedangkan ada istilah lain yakni *source*. Maka dari itu untuk memperkuat teorema ini, penulis mencoba membuktikannya dengan menerapkan keberadaan *source* ini. Sehingga buktinya akan menjadi lebih kuat lagi.

Oleh karena itu, kekurangan-kekurangan ini dapat menjadi urgensi peneliti membahas (lagi) mengenai representasi quiver sederhana. Maka dalam penelitian ini akan dibahas mengenai definisi representasi quiver sederhana secara matematis, kemudian akan dibahas mengenai sifat-sifat dari representasi quiver sederhana yang selanjutnya akan digunakan untuk menyelidiki syarat cukup dan syarat perlu dari suatu representasi quiver sederhana.

1. 2. Identifikasi Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, permasalahan yang berhasil penulis identifikasi adalah:

1. Sedikitnya kajian representasi quiver dalam bahasan aljabar
2. Kurangnya konsep himpunan dalam representasi quiver

1. 3. Batasan Masalah

Berdasarkan identifikasi masalah yang sudah penulis jelaskan di atas, penelitian ini dibatasi:

1. Bahasan yang akan dikaji lebih berfokus pada bentuk representasi quiver sederhana dengan menggunakan konsep aljabar
2. Dimensi yang digunakan pada kajian ini terbatas pada quiver berdimensi hingga
3. Quiver yang akan digunakan dalam kajian ini adalah quiver tanpa siklus

1. 4. Rumusan Masalah

Berdasarkan batasan masalah yang telah dipaparkan, maka penelitian ini akan berfokus pada:

1. Bagaimana suatu representasi quiver dapat dipandang sebagai representasi sederhana?
2. Bagaimana syarat perlu dan cukup representasi quiver sederhana?

1. 5. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka dapat dirumuskan tujuan penelitian yang ingin dicapai dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui definisi representasi quiver sederhana.
2. Mengetahui syarat perlu dan syarat cukup representasi quiver sederhana

1. 6. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan baru mengenai kajian representasi quiver. Penelitian ini juga diharapkan dapat menjadi konstruktor terhadap hasil penelitian sebelumnya maupun penelitian yang akan datang. Sedangkan manfaat bagi penulis salah satunya dapat meningkatkan kemampuan analisis dan berpikir kritis serta memperluas wawasan mengenai syarat perlu dan syarat cukup dari representasi quiver, sifat-sifat representasi quiver hingga bagaimana sebuah representasi quiver dapat disebut representasi sederhana.

1. 7. Metode Penelitian

Menurut Cholid Narbuko dan Abu Ahmadi, metode penelitian adalah cara untuk melakukan sesuatu dengan menggunakan sesuatu dengan fikiran seksama untuk mencapai tujuan (Narbuko & Ahmadi, 1997). Sedangkan menurut Husein Umar, metode merupakan salah satu atau jalan pengaturan atau pemeriksaan sesuatu dengan benar (Umar, 2008). Dengan demikian dapat dipahami bahwa metode penelitian adalah sesuatu tentang cara-cara melakukan pengamatan atau penelitian menggunakan fikiran dengan seksama melalui tahapan-tahapan yang telah ditentukan.

1.7.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian pada penelitian ini adalah penelitian deskriptif, dimana menurut Cholid Narbuko, penelitian deskriptif merupakan penelitian yang berusaha untuk memecahkan masalah berdasarkan data-data (pengambilan data, penyajian data, analisis data, dan interpretasi data). Penelitian ini juga dapat bersifat komparatif dan korelatif. Kemudian mengenai jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data kualitatif sehingga penelitian ini bersifat kualitatif (Narbuko & Ahmadi, 2009). Oleh sebab itu, penelitian ini dapat disebut juga penelitian deskriptif kualitatif.

1.7.2. Sumber Data

Dalam penelitian ini sumber data dibagi menjadi data primer dan data sekunder. Kedua jenis sumber data ini dibagi berdasarkan topik bahasannya. Sehingga untuk data primer berupa jurnal dan buku-buku teori representasi quiver antara lain: jurnal Sifat-sifat representasi quiver sederhana (Kurniawan, 2016), jurnal *introduction to representation theory of quiver* (Scott, 2016), buku *quiver representation and quiver varieties* (Jr., 2016), dan buku *an introduction to quiver representation* (Harm Derksen, 2017). Sedangkan untuk data sekunder berupa jurnal, buku, skripsi serta catatan kuliah (*lecture notes*) yang membahas mengenai aljabar abstrak dan teori graf.

1.7.3. Teknik Pengumpulan Data

Telah disinggung bahwa data yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah data primer dan sekunder berupa bahan kepustakaan seperti buku, jurnal dan skripsi, maka teknik pengumpulan data yang paling tepat dilakukan adalah studi literatur atau studi kepustakaan.

Studi literatur adalah penelitian yang dilakukan oleh peneliti dengan mengumpulkan sejumlah buku-buku yang berkaitan dengan masalah dan tujuan penelitian (Danial & Warsiah, 2009). Maka dalam penelitian ini, kegiatan yang dilakukan sangat berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka yakni dengan cara membaca, mencatat, serta mengelola bahan penelitian.

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini antara lain: Mengumpulkan referensi/bahan kepustakaan yang akan dijadikan sebagai rujukan, membaca referensi/bahan kepustakaan yang terkait dengan masalah penelitian, membandingkan beberapa konsep definisi dari berbagai referensi/bahan kepustakaan, mencatat kata kunci dari referensi/bahan kepustakaan yang dibaca dalam bentuk catatan mentah/catatan lapangan, dan mengkategorikan data-data tersebut berdasarkan kata kunci dan konsep yang serupa.

1.7.4. Teknik Analisis Data dan Teknik Pembuktian

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah teknik analisis data non statistic dikarenakan data yang diperoleh bukan berupa angka sehingga lebih cocok menggunakan teknik analisis data model Miles dan Huberman.

Miles dan Huberman (1984) mengemukakan bahwa, aktivitas dalam analisis data kualitatif dilakukan secara interaktif dan berlangsung secara terus menerus sampai tuntas, sehingga datanya sudah jenuh. Aktivitas dalam analisis data meliputi: reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan (Sugiyono, 2013).

Setelah melakukan pengumpulan data kemudian dilakukan tahapan teknik analisis model Miles dan Huberman, antara lain: 1) Reduksi data, Setelah data berhasil dikategorikan berdasarkan kata kunci dan konsep yang serupa. Peneliti melakukan reduksi data dengan cara mengurangi kata kunci dan konsep-konsep yang tidak sesuai dengan bahasan. Ketidaksesuaian kata kunci dan konsep ini diambil berdasarkan batasan masalah, sehingga jika ada kata kunci dan konsep di luar batasan masalah maka data tersebut tidak akan digunakan. Salah satu bahasan yang direduksi adalah konsep morfisma representasi dalam representasi quiver, karena penelitian ini hanya berfokus pada kajian aljabar, maka konsep ini direduksi/dihilangkan.

Kedua, Penyajian data, Setelah melakukan reduksi data, peneliti menyajikan data-data yang sudah dianalisis menjadi sebuah tulisan yang rapih. Namun jika diperlukan beberapa kata kunci atau konsep tambahan maka dapat kembali pada proses pengumpulan data dan reduksi data.

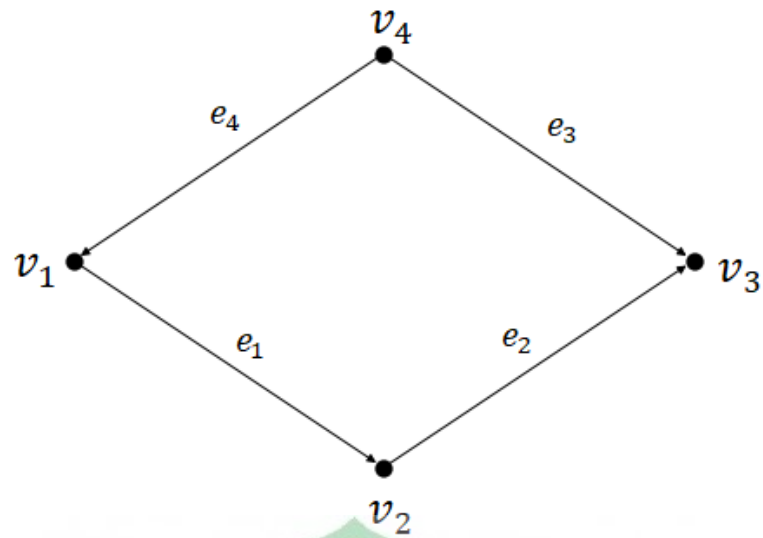
Ketiga, Penarikan Kesimpulan dan Verifikasi. Setelah selesai menyajikan data, peneliti merasa perlu dilakukan penarikan kesimpulan dari data yang telah dianalisis, termasuk membuat kesimpulan sebagai jawaban dari rumusan masalah yang diajukan di awal penelitian. Selain melakukan penarikan kesimpulan, peneliti juga melakukan verifikasi data yakni memverifikasi bukti-bukti dari pembuktian teorema yang sudah dibuktikan dengan mendiskusikannya kepada dosen pembimbing agar pembuktian yang dilakukan dalam penelitian ini bersifat valid dan kuat.

Terkait teknik pembuktian yang digunakan dalam penelitian ini berupa teknik pembuktian langsung dan kontraposisi. Teknik pembuktian langsung digunakan dalam membuktikan contoh-contoh (sifat, teorema, lemma) dalam bab 2, 3 serta bab 4. Sedangkan teknik pembuktian kontraposisi digunakan untuk membuktikan teorema yang berkaitan dengan syarat cukup dan syarat perlu representasi quiver sederhana.

1. 8. Kerangka Pemikiran

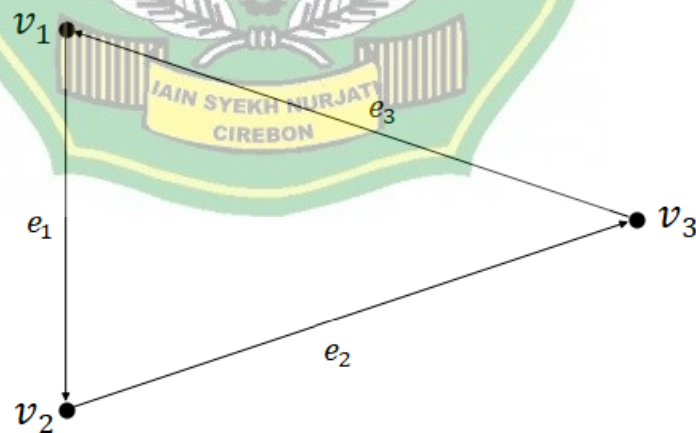
Graf berarah D terdiri dari himpunan berhingga dari titik-titik (V) dan koleksi pasangan-pasangan terurut dari titik-titik yang berbeda. Pasangan titik (u, v) disebut sisi berarah atau busur (*arc*) yang disimbolkan dengan uv . Atau dengan kata lain sebuah graf berarah D terdiri dari himpunan titik-titik $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ dan pemetaan pada (onto) yang memetakan setiap sisi ke pasangan terurut titik v_i, v_j .

Misalkan diberikan graf berarah D maka dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar I.1 Graf berarah tanpa siklus

Graf berarah ini disebut sebagai graf berarah tanpa siklus karena dalam graf tersebut tidak memiliki lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Kebalikannya, jika suatu graf berarah memiliki siklus maka graf berarah ini dikatakan graf berarah siklik seperti graf berarah di bawah ini



Gambar I.2 Graf berarah dengan siklus

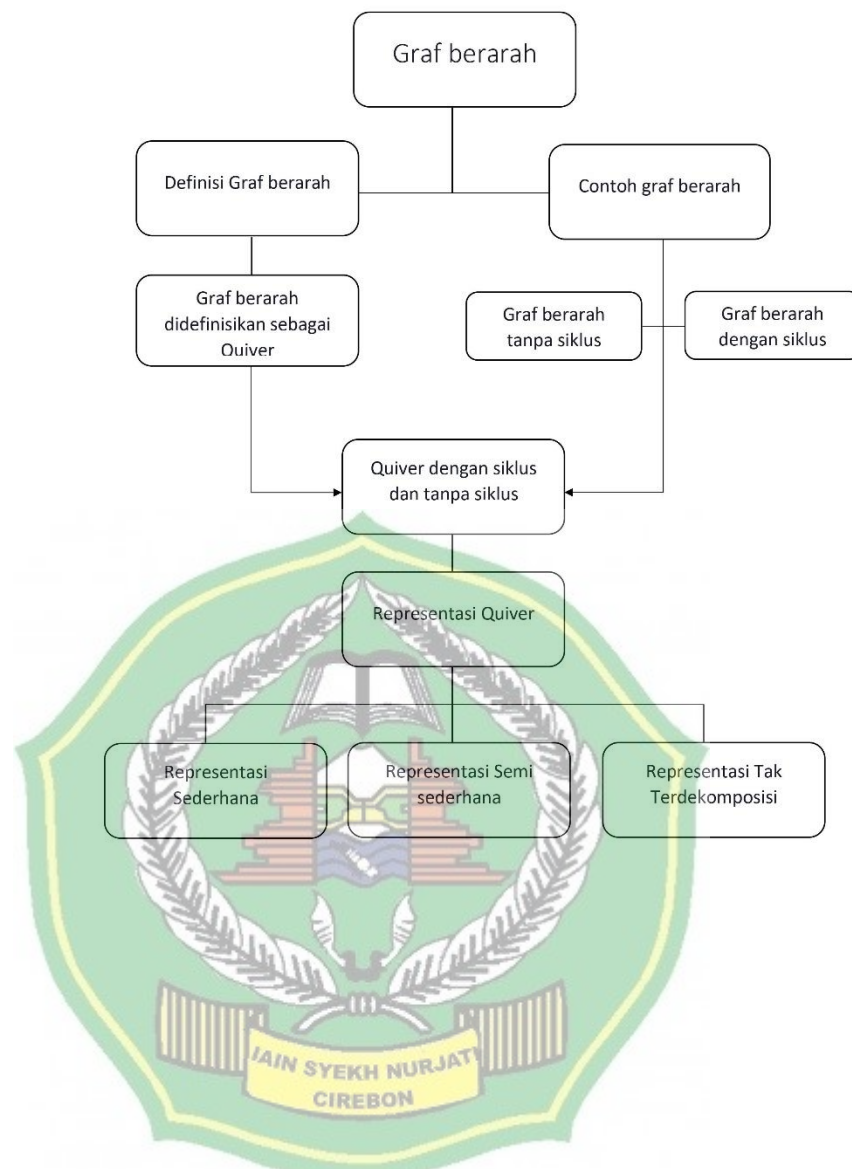
Ditinjau dari konsepnya, graf berarah dan quiver pada dasarnya adalah sama. Namun secara definisi quiver diartikan sebagai graf berarah yang terdiri dari pasangan dan himpunan yaitu Q_0 yang memuat titik (*vertex*) dan Q_1 yang memuat

panah (*edge*) serta memiliki dua pemetaan $s, t: Q_1 \rightarrow Q_0$ yang memetakan setiap panah $\alpha \in Q_1$ ke titik asalnya yaitu $s(\alpha)$ dan ke titik targetnya $t(\alpha)$ di Q_0 . Sehingga jika suatu graf berarah memiliki siklus maka Quivernya memiliki siklus juga, begitupun sebaliknya jika suatu D tidak memiliki siklus maka quivernya juga tidak memiliki siklus.

Maka dalam penelitian ini akan diambil contoh-contoh quiver tanpa siklus sehingga dari quiver ini akan diamati representasi quivernya. Dengan cara mendefinisikan representasi quivernya serta dengan melihat jenis representasinya.

Representasi quiver dapat dibagi menjadi 3 jenis, yaitu: *simple* (sederhana), *semisimple* (semi sederhana), dan *indecomposable* (tak terdekomposisi). Ketiga jenis representasi ini akan dibedah melalui contoh-contoh quiver yang akan diteliti. Walaupun demikian penelitian ini tetap berfokus pada jenis representasi quiver sederhana. Jika suatu quiver dinyatakan memiliki suatu representasi sederhana, maka akan dicari properti / sifat yang dimiliki oleh representasi quiver tersebut. Setelahnya akan dicari syarat perlu dan syarat cukup dari representasi quiver sederhananya.

Oleh sebab itu, penelitian ini memerlukan pendekatan deskriptif kualitatif dengan metode pengumpulan data studi literatur guna meninjau definisi representasi quiver, properti yang dimiliki representasi quiver sederhana serta syarat perlu dan syaratukupnya. Berikut diagram alir dalam penelitian ini.



Gambar I.3 Diagram Alir

1. 9. Sistematika Penulisan

Bab I menggambarkan isi penelitian secara keseluruhan agar pembaca dapat mengetahui bahasan apa yang akan disampaikan dalam penelitian ini. Bab ini memiliki beberapa sub bab, antara lain: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, kerangka pemikiran, dan sistematika penelitian.

Bab II berisi mengenai teori-teori dasar yang berkaitan dengan struktur aljabar sehingga teori ini akan digunakan sebagai landasan dasar dalam penelitian ini. Struktur aljabar yang dimaksud, yaitu: himpunan, grup, gelanggang, lapangan, ruang vector dan aljabar.

Bab III berisi mengenai teori-teori pendukung yang berkaitan dengan graf (dan quiver) sehingga teori ini akan digunakan sebagai landasan utama dalam penelitian ini. Teori yang dimaksud meliputi graf, terminologi dalam graf, graf berarah, dan quiver.

Bab IV berisi mengenai pembahasan dari penelitian ini, yaitu representasi quiver sederhana. Pembahasan yang dikaji antara lain: definisi representasi sederhana, jenis-jenis representasi quiver serta properti representasi quiver sederhana.

Bab V berisi mengenai kesimpulan yang diperoleh dari bab IV yang disertai dengan saran terkait hasil penelitian.

