ABSTRACT ALGEBRA

= NOTES ON RING THEORY =

Herani Tri Lestiana, M.Sc.

IAIN Syekh Nurjati Cirebon

JURUSAN TADRIS MATEMATIKA
INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI (IAIN)
SYEKH NURJATI CIREBON

DIKTAT
ALJABAR ABSTRAK (TEORI RING)
(Kode MK: MAT720)

PENGESAHAN		
Disiapkan Oleh:	Diperiksa Oleh:	Disahkan Oleh:
Dosen Pengampu	Gugus Mutu Jurusan Matematika	Ketua Jurusan Tadris Matematika
		JURUSAN TADRIS MATEMATIKA FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN IAIN SYEKH NURJATI CIREBON
Herani Tri Lestiana, M.Sc.	Arif Abdul Haqq, S.Si., M.Pd.	Dr. Muhamad Ali Misri, M.Si.
NIP. 19880325 201801 2 003	NIP. 19871216 201503 1 004	NIP. 19811030 201101 1 004
Tanggal Pengesahan : 5 September 2018		
Halaman : 45 halaman		
Alamat: Jl. Perjuangan By Pass Sunyaragi Cirebon, Kota Cirebon, Kode Pos 45132		

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas perkenaan-Nya sehingga penyusunan dan penulisan Diktat Aljabar Abstrak ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Salam dan doa tak lupa pula penulis haturkan kepada suri tauladan kita, Nabi Muhammad SAW. Diktat ini bertujuan untuk mendapatkan pengertian yang lebih mendalam mengenai materi kuliah Aljabar Abstrak yang diberikan.

Diktat ini berisi materi mata kuliah Aljabar Abstrak yaitu ring dan subring, daerah integral dan lapangan, ideal dan faktor ring, dan homomorfisma ring. Diktat ini juga memuat contoh soal dan latihan soal yang diharapkan dapat membantu pembaca memahami materi.

Penyusun menyadari sepenuhnya bahwa diktat ini masih banyak kekurangan. Untuk itu, penyusun mengharapkan masukan dari semua pihak terkait untuk perbaikan penuntun ini. Akhir kata, semoga buku ini bermanfaat bagi pengguna, khususnya para mahasiswa S-1 Jurusan Tadris Matematika IAIN Syekh Nurjati Cirebon.

Cirebon, September 2018

Penyusun

DAFTAR ISI

I. RING DAN SUBRING

A. RING

DEFINISI I.1Ring

Sebuah himpunan tak kosong *R* dengan dua operasi biner penjumlahan (a+b) dan perkalian (ab) disebut ***ring*** jika :

1. R merupakan **grup komutatif** terhadap **penjumlahan**
2. R bersifat **asosiatif** terhadap **perkalian**
3. Memenuhi **hukum distributif**

(R,+) merupakan **grup komutatif** jika untuk semua a,b,c $\in$ R berlaku

1. Tertutup
2. a+b = b+a
3. (a+b) + c = a + (b+c)
4. Ada 0 di R sehingga a+0 = 0+a = a.
5. Ada $-a$ di R sehingga a+(-a) = 0

DEFINISI I.2. Hukum Distributif

Suatu struktur aljabar (R,+,.) disebut memenuhi **hukum distributif** jika untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

1. $a(b + c) = ab + ac$
2. $(a + b)c = ac + bc$

CONTOH RING

1. $(\mathbb{Q}, +, .)$
2. $(\mathbb{R}, +, .)$
3. $(\mathbb{R}, +, .)$
4. $(\mathbb{Z}, +, .)$
5. $(n\mathbb{Z}, +, .)$
6. $(\mathbb{Z}_n, +, .)$
7. $(M_{2x2}(\mathbb{R}), +, .)$
8. $(\mathbb{Q}\sqrt{2}, +, .)$ dengan $\mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Q}\}$
9. $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +, .)$ dengan $\mathbb{Z}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z}\}$

CONTOH I.1

Tunjukkan bahwa ($\mathbb{Z}_3$, +, .) sebuah ring

Langkah pembuktian: 1. Buktikan bahwa ($\mathbb{Z}_3$, +) grup komutatif

2. Buktikan ($\mathbb{Z}_3$,.) bersifat asosiatif

3. Buktikan Z_3 bersifat distributif

Bukti:

$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2)$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_3, +)$ grup komutatif
   a. Dari tabel cayley penjumlahan pada $\mathbb{Z}_3$, terlihat bahwa $\mathbb{Z}_3$ tertutup pada penjumlahan.

      $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}_3,\ a + b \in \mathbb{Z}_3$

   b. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$

      dengan $a = 3k + x,\ b = 3m + y,\ c = 3n + z; k, m, n, x, y, z, \in \mathbb{Z}$

      x, y, z sisa pembagian a, b, c jika dibagi 3.

      $a + (b + c) = (3k + x) + ((3m + y) + (3n + z))$

      $= (3k + x) + (3(m + n) + y + z)$

      $= (3k + x) + (3(m + n) + y + z)$

      $= 3(k + m + n) + (x + y + z)$

      $= 3(k + m) + 3n + ((x + y) + z)$

      $= (3k + 3m + (x + y)) + 3n + z$

      $= \big((3k + x) + (3m + y)\big) + (3n + z)$

      $= (a + b) + c$

      Dari tabel cayley penjumlahan $\mathbb{Z}_3$ jelas bahwa

      0 + (1 + 2) = (0 + 1) + 2 = 0

      1 + (1 + 2) = (1 + 1) + 2 = 1

      2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 2

      2 + (0 + 2) = (2 + 0) + 2 = 1

      Jadi $\mathbb{Z}_3$ bersifat asosiatif terhadap penjumlahan.

c. Ambil $0,1,2 \in \mathbb{Z}_3$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$1 + 2 = 2 + 1 = 0$

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$

Jadi $\mathbb{Z}_3$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan.

d. $(\mathbb{Z}_3, +)$ mempunyai elemen identitas yaitu 0 sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}_3$.

Dari tabel cayley diperoleh:

$0 + 0 = 0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$0 + 2 = 2 + 0 = 2$

e. $\forall a \in \mathbb{Z}_3, \exists(-a) \in \mathbb{Z}_3 \ni a + (-a) = 0.$

Dari tabel cayley diperoleh:

$0 + 0 = 0$ → invers dari 0 adaalah 0

$1 + 2 = 0$ → invers dari 1 adaalah 2

$2 + 1 = 0$ → invers dari 2 adaalah 1

2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_3, .)$ bersifat asosiatif

Dari tabel cayley jelas bahwa $\mathbb{Z}_3$ bersifat asosiatif terhadap perkalian

Ambil $0,1,2 \in \mathbb{Z}_3$

$0.(1.2) = (0.1).2 = 0$

$1.(1.2) = (1.1).2 = 2$

$2.(1.2) = (2.1).2 = 1$

$2.(0.2) = (2.0).2 = 0$

3. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_3, +, .)$ bersifat distributif

Dari tabel cayley jelas bahwa $\mathbb{Z}_3$ bersifat distributif

Ambil $0,1,2 \in \mathbb{Z}_3$

$0.(1 + 2) = 0.1 + 0.2 = 0$

$0.(2 + 2) = 0.2 + 0.2 = 0$

$1.(1 + 2) = 1.1 + 1.2 = 0$

$1.(0 + 2) = 1.0 + 1.2 = 2$

$1.(1 + 0) = 1.1 + 1.0 = 1$

$2.(1 + 2) = 2.1 + 2.2 = 0$

$2.(0 + 2) = 2.0 + 2.2 = 1$

$2.(1 + 0) = 2.1 + 2.0 = 2$

DEFINISI I.3

Misalkan (R, +, ·) suatu ring.

a. Ring R disebut **ring komutatif** jika R komutatif terhadap perkalian

$$a.b = b.a, \ \forall\, a, b \in R$$

b. Ring R disebut **ring dengan elemen satuan** (identitas) jika R mempunyai identitas terhadap perkalian.

c. Ring R disebut **ring komutatif dengan elemen satuan** jika R komutatif dan mempunyai identitas terhadap perkalian.

d. Sebuah ring kesatuan R disebut **ring pembagian** jika ∀ a≠0 di R, terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga $a. a^{-1} = a^{-1}.a = 1_R$.

   1_R adalah elemen satuan atau identitas terhadap perkalian di R.

   a kemudian disebut ***unit***

e. Unit adalah elemen tak nol dari suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan yang mempunyai invers terhadap perkalian

CONTOH I.2

Buktikan bahwa $2\mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah sebuah ring komutatif.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $(2\mathbb{Z}, +)$ grup komutatif

   a. Ambil sebarang a = 2x dan b = 2y ∈ $2\mathbb{Z}$, dimana x,y ∈ $\mathbb{Z}$

      Akan ditunjukkan a+b ∈ $2\mathbb{Z}$.

      a+b = 2x + 2y

      = 2(x+y) *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

      Karena x,y ∈ $\mathbb{Z}$, maka x+y ∈ $\mathbb{Z}$. Jadi a+b = 2(x+y) ∈ $2\mathbb{Z}$

      Jadi $2\mathbb{Z}$ tertutup terhadap penjumlahan.

   b. Ambil sembarang a = 2x, b = 2y, dan c = 2z ∈ $2\mathbb{Z}$, dimana x,y,z ∈ $\mathbb{Z}$

      Akan ditunjukkan a+(b+c) = (a+b)+c

      a + (b + c) = 2x + (2y + 2z)

$= 2x + 2(y + z)$ *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2(x + (y + z))$ *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2((x + y) + z)$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2(x + y) + 3z$ *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

$= (2x + 2y) + 2z$ *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

$= (a + b) + c$

Jadi $2\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap penjumlahan

c. $(2\mathbb{Z}, +)$ mempunyai elemen identitas 0 sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in 2\mathbb{Z}$

Ambil sebarang $a = 2x \in 2\mathbb{Z}$, dimana $x \in \mathbb{Z}$

$a + 0 = 2x + 2.0$	$0 + a = 2.0 + 2x$
$= 2(x + 0)$	$= 2(0 + x)$
$= 2x$	$= 2x$
$= a$	$= a$

Jadi 0 adalah unsur identitas penjumlahan pada $2\mathbb{Z}$

d. Ambil sebarang $a = 2x \in 2\mathbb{Z}$, dimana $x \in \mathbb{Z}$

$2x + (-2x) = 0$

Pilih $b = 2(-x)$.

Akan ditunjukkan $2(-x) = -2x$

$2x + 2(-x) = 2(x+(-x))$ *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2.0$

$= 0$

Jadi $2(-x) = -(2x)$ → $2(-x)$ adalah invers dari $2x$

Jadi $\forall a \in 2\mathbb{Z}, \exists(-a) \in 2\mathbb{Z} \ni a + (-a) = 0$

e. Ambil sebarang $a = 2x$ dan $b = 2y \in 2\mathbb{Z}$, dimana $x,y \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan $a+b = b+a$

$a+b = 2x + 2y$

$= 2(x + y)$ *sifat distributif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2(y + x)$ *sifat komutatif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2y + 2x$

$= b + a$

Jadi $2\mathbb{Z}$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan

2. Ambil sebarang $a = 2x$, $b = 2y$, dan $c = 2z \in 2\mathbb{Z}$, dimana $x,y,z \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan $a(b.c) = (a.b)c$

$a\ (b.c) = 2x\ (2y.2z)$

$= 2x\ (2(2yz))$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2.2.2\ (x(yz))$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2.2.2\ ((xy)z)$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2.2\ (xy).\ 2z$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{Z}$

$= (2x\ .\ 2y).\ 2z$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{Z}$

$= (a.b).\ c$

Jadi $2\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap perkalian

3. Ambil sebarang $a = 2x$, $b = 2y$, dan $c = 2z \in 2\mathbb{Z}$, dimana $x,y,z \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan $a.(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b).c = ac + bc$

$a\ (b + c) = 2x\ (2y + 2z)$

$= 2x\ (2(y + z))$

$= 2.2\ (x(y + z))$

$= 2.2\ (xy + xz)$

$= 2.2.xy + 2.2.xz$

$= 2x.2y + 2x.2z$

$= ab + ac$

$(a + b).c = (2x + 2y).\ 2z$

$= ((x + y)\ 2).\ 2z$

$= ((x + y)\ z).\ 2.2$

$= (xz + yz).\ 2.2$

$= 2.2.xz + 2.2.yz$

$= 2x.2z + 2y.2z$

$= a.c + b.c$

Jadi $2\mathbb{Z}$ bersifat distributif terhadap perkalian dan penjumlahan.

4. Ambil sebarang $a = 2x$ dan $b = 2y \in 2\mathbb{Z}$, dimana $x,y \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan $a.b = b.a$

$a\ .b = 2x.\ 2y$

$= 2.2.xy$ *sifat komutatif pada* $\mathbb{Z}$

$= 2.2.yx$ *sifat komutatif pada* $\mathbb{Z}$

= 2y. 2x *sifat asosiatif pada $\mathbb{Z}$*

= b.a

Jadi $2\mathbb{Z}$ bersifat komutatif terhadap perkalian.

Jadi $2\mathbb{Z}$ adalah **ring komutatif**.☐

CONTOH I.3

Tentukan unit-unit pada $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_6$

Penyelesaian:

a. Elemen identitas pada $\mathbb{Z}$ adaalah 1. Namun, tidak semua anggota $(\mathbb{Z},+,.)$ mempunyai invers di $\mathbb{Z}$. Elemen $(\mathbb{Z},+,.)$ yang mempunyai invers hanya 1 dan -1 karena:

   1.1 = 1 dan (-1)(-1) = 1.

   Jadi unit dari $(\mathbb{Z},+,.)$ adalah : $U(\mathbb{Z}) = \{1,-1\}$

b. Untuk menentukan unit pada $\mathbb{Z}_6$, dibuat tabel cayley perkalian pada $\mathbb{Z}_6$

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

   Dari tabel cayley di atas, terlihat identitas dari $(\mathbb{Z}_6,+,.)$ adalah 1. Unit dari $(\mathbb{Z}_6,+,.)$ adalah elemen-elemen $\mathbb{Z}_6$ yang memiliki invers. Elemen-elemen tersebut jika dikalikan dengan inversnya hasilnya 1. Dari tabel cayley, didapat bahwa elemen yang punya invers adalah 1 dan 5.

   Invers dari 1 adalah 1 → 1.1 = 1

   Invers dari 5 adalah 5 → 5.5 = 1

   Jadi : $U(\mathbb{Z}_6) = \{1,5\}$

CONTOH I.4

1. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$
   - Merupakan ring komutatif karena $a.b = b.a, \ \forall\, a, b \in 2\mathbb{Z}$
   - Tidak mempunyai unsur satuan atau identitas perkalian e
   - Bukan termasuk ring pembagian karena tidak punya identitas e sehingga $\forall$ a≠0 $\in 2\mathbb{Z}$, tidak terdapat $a^{-1} \in 2\mathbb{Z}$ sehingga $a.\ a^{-1} = a^{-1}.a = e$.

2. $(M_{2x2}(\mathbb{R}), +, .)$
   - Bukan merupakan ring komutatif karena $A.B = B.A, \ \forall\, A, B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$
   - Mempunyai unsur satuan atau identitas perkalian yaitu $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - Bukan ring pembagian karena tidak semua $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ mempunyai invers. Matriks $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ mempunyai invers hanya jika det $\neq 0$.

3. $(\mathbb{Z}, +, .)$
   - Merupakan ring komutatif karena $\mathrm{a.b} = \mathrm{b.a}, \ \forall\, \mathrm{a, b} \in \mathbb{Z}$
   - Mempunyai unsur satuan atau identitas perkalian yaitu 1.
   - Bukan ring pembagian karena tidak semua $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$ mempunyai invers.

4. $(\mathbb{R}, +, .)$
   - Merupakan ring komutatif karena $a.b = b.a, \ \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$
   - Mempunyai unsur satuan atau identitas perkalian yaitu 1.
   - Termasuk ring pembagian karena $\forall$ a≠0 $\in \mathbb{R}$, terdapat $a^{-1} \in \mathbb{R}$ sehingga $a.\ a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

5. $(\mathbb{Q}, +, .)$
   - Merupakan ring komutatif karena $\mathrm{a.b} = \mathrm{b.a}, \ \forall\, \mathrm{a, b} \in \mathbb{Z}$
   - Mempunyai unsur satuan atau identitas perkalian yaitu 1.
   - Termasuk ring pembagian karena $\forall$ a≠0 $\in \mathbb{Q}$, terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ sehingga $a.\ a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

6. $(\mathbb{C}, +, .)$
   - Merupakan grup komutatif karena $\mathrm{a.b} = \mathrm{b.a}, \ \forall\, \mathrm{a, b} \in \mathbb{Z}$
   - Mempunyai unsur satuan atau identitas perkalian yaitu 1.
   - Termasuk ring pembagian karena $\forall$ a≠0 $\in \mathbb{C}$, terdapat $a^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga $a.\ a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

SIFAT-SIFAT RING

TEOREMA I.1. Aturan operasi perkalian

Jika (R,+,.) merupakan ring, ∀a, b, c ∈ R berlaku:

a. $a.\,0_R = 0_R.a = 0_R$ (0_R adalah identitas penjumlahan di R)

b. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

c. $(-a)(-b) = ab$

d. $a(b-c) = ab - ac$ dan $(a-b)c = ac - bc$

Akibat dari sifat (b) dan sifat (c)

e. $(-1)a = -a$

f. $(-1)(-1) = 1$

Bukti:

a. Ambil a∈R.

0 bisa ditulis sebagai (0+0) karena 0+0 = 0.

$a\,(0+0) = a.\,0$

$a.0 + a.\,0 = a.0$ *hukum distributif*

$a.0 + a.0 = a.0 + 0$ *penambahan elemen netral 0*

$a.0 = 0$ *hukum kanselasi kanan*

$(0+0).a = 0.a$

$0.a + 0.a = 0.a$ *hukum distributif*

$0.a + 0.a = 0.a + 0$ *penambahan elemen netral 0*

$0.a = 0$ *hukum kanselasi kanan*

Jadi $a.0 = 0.a = 0$

b. $\forall\, a, b \in R, \exists\,(-a),(-b) \in R$ sehingga $(-a) + a = 0$ dan $(-b) + b = 0$

Jelas $-(ab) + ab = 0$

Akan dibuktikan bahwa $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

$a(-b) + ab = a(-b+b)$ *hukum distributif*

$= a.0$

$= 0$ *teorema (a)*

(−a)b + ab = (−a+a)b *hukum distributif*

= 0.b

= 0 *teorema (a)*

Jadi *a(−b)* dan *(−a)b* masing-masing merupakan invers dari *(ab)*. Karena elemen invers itu tunggal, maka *a(−b) = (−a)b = − (ab)*

c. Ambil a,b∈R

(−a)(−b) = − (a(−b))

= −(−(ab))

= ab

d. Ambil a,b∈R

a(b − c) = a(b + (−c)) *definisi b − c = b+(*−c)

= ab + a(−c) *hukum distributif*

= ab + (−ac) *teorema (b)*

= ab − ac *definisi b − c = b+(*−c)

(b − c)a = (b + (−c)).a *definisi b − c = b+(*−c)

= ba + (−c)a *hukum distributif*

= ba + (−ca) *teorema (b)*

= ba − ca *definisi b − c = b+(*−c)

TEOREMA I.2. Keunikan elemen identitas dan Invers

a. Unsur kesatuan/ identitas dari sebuah ring adalah unik/tunggal.
b. Invers setiap elemen ring pada operasi perkalian adalah unik/tunggal.

Bukti:

a. Misal e_1 dan e_2 adalah elemen identitas pada ring R.

$e_1 . e_2 = e_2$ (*karena e_1 adalah identitas dari R)*

dan $e_1 . e_2 = e_1$ (*karena e_2 adalah identitas dari R)*

Jadi $e_1 = e_1 . e_2 = e_2$.

$\Leftrightarrow$ $e_1 = e_2$

Jadi identitas sebuah ring adalah tunggal.

b. Misal e adalah elemen identitas pada ring R.

Misal ${a_1}^{-1}$ dan ${a_2}^{-1}$ adalah invers dari $a \in R$.

maka $a.{a_1}^{-1} = {a_1}^{-1}.a = e$ dan $a.{a_2}^{-1} = {a_2}^{-1}a = e$

$${a_1}^{-1} = {a_1}^{-1}.e$$
$$= {a_1}^{-1}.(a.{a_2}^{-1})$$
$$= ({a_1}^{-1}.a).{a_2}^{-1})$$
$$= e.{a_2}^{-1}$$
$$= {a_2}^{-1}$$

Jadi ${a_1}^{-1} = {a_2}^{-1}$

Jadi invers setiap elemen ring pada operasi perkalian adalah unik/tunggal.

LATIHAN SOAL

1. Misalkan (R,+,.) didefinisikan operasi ⊕ dan ⊗ pada R sbb:

   a ⊕ b = a + b + 1 dan a ⊗ b = ab + a + b.

   Tunjukan apakah merupakan suatu ring komutatif.
2. Tunjukkan apakah himpunan bilangan ganjil yg ditunjukkan oleh:

   $1 + 2\mathbb{Z} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sebuah ring atau bukan.
3. Ring $\{0,2,4,6,8\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ mempunyai unsur satuan (identitas) dan unit. Carilah unsur kesatuan dan unit dari ring tersebut.

4. Buktikan bahwa jika R suatu ring, maka ∀a, b ∈ R, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + a.b + b.a$

   Keterangan:

   Misalkan R suatu ring, a^n dengan $n \in \mathbb{Z}$ dan $a \in \mathbb{R}$ didenisikan sebagai berikut:

   $$a^n = \begin{cases} a.a.a. \dots .a \text{ (perkalian } n \text{ buah } a\text{)}, & \text{jika } n>0 \\ 1, & \text{jika } n=0 \end{cases}$$

5. Buktikan bahwa jika R suatu ring abelian, maka ∀a, b ∈ R, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

B. SUBRING

DEFINISI I.4. Subring

Misal S himpunan bagian tak kosong dari ring R.
S adalah subring dari R jika S juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama pada ring R.

Dengan kata lain, S adalah subring dari R jika S memenuhi semua aksioma/syarat ring R, yaitu:

1. S merupakan **grup komutatif** terhadap **penjumlahan**
2. S bersifat **asosiatif** terhadap **perkalian**
3. Memenuhi **hukum distributif**

TEOREMA I.3. Uji Subring

Misal S himpunan bagian tak kosong dari ring R.

S adalah subring dari R jika dan hanya jika

1. ***S tertutup*** terhadap operasi ***pengurangan*** → $\forall a, b \in S, (a - b) \in S$
2. ***S tertutup*** terhadap operasi ***perkalian*** → $\forall a, b \in S, (ab) \in S$

Bukti

(⇒) Diketahui S himpunan bagian tak kosong dari ring R.

S subring R

Akan dibuktikan (1) $\forall a, b \in S, (a - b) \in S$

(2) $\forall a, b \in S, (ab) \in S$

(1) Karena S adalah subring R, maka S tertutup terhadap penjumlahan dan setiap elemen di S mempunyai invers pada penjumlahan.

Ambil a dan $(-b)$ di S

$a + (-b) \in S \iff a - b \in S$

Jadi S tertutup terhadap pengurangan.

(2) Karena S adalah subring R, maka S tertutup terhadap perkalian.

Jadi jika S subring R maka S tertutup terhadap pengurangan dan perkalian.

($\Leftarrow$) Diketahui S himpunan bagian tak kosong dari ring R.

$$\forall a, b \in S, (a - b) \in S$$

$$\forall a, b \in S, (ab) \in S$$

Akan dibuktikan S subring R.

- Karena S himpunan tak kosong maka S mempunyai paling sedikit satu elemen, misalkan *x*.

  Ambil $a = x$ dan $b = x$ di S

  $(a - b) \in S \iff (x - x) \in S$

  $\iff 0 \in S$

  Jadi ada identitas penjumlahan di S, yaitu 0.

- Ambil $a = 0$ dan $b = x$ di S

  $(a - b) \in S \iff (0 - x) \in S$

  $\iff 0 + (-x) \in S$

  $\iff -x \in S$

  Jadi untuk setiap $x \in S$ terdapat $-x \in S$ (terdapat invers penjumlahan untuk setiap elemen S)

- Untuk sembarang *y* di S, maka –y juga di S

  Ambil $a = x$ dan $b =$ –y di S

  $(a - b) \in S \iff (x - (-y)) \in S$

  $\iff x + (-(-y)) \in S$

  $\iff (x + y) \in S$

  Jadi S tertutup terhadap penjumlahan.

Sifat komutatif, asosiatif, dan distributif pada penjumlahan dan perkalian di S menurun dari sifat ring R, karena S merupakan himpunan bagian dari R.

- Ambil a , b , c di S

  Karena S adalah himpunan bagian dari ring R, maka pada S berlaku pula sifat komutatif dan asosiatif penjumlahan seperti yang berlaku di R.

  $a + b = b + a$

  $a + (b + c) = (a + b) + c$

- Ambil a , b , c di S

  Karena S adalah himpunan bagian dari ring R, maka pada S berlaku pula sifat asosiatif perkalian dan distributif seperti yang berlaku di R.

$a(b.c) = (a.b)c$

$a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$

Karena S memenuhi semua aksioma ring, maka S merupakan subring R.

Dari hasil pembuktian (⇒) dan (⇐) maka teorema 3 terbukti dan bisa digunakan untuk uji subring.

CONTOH I.5

- {0} dan R adalah subring dari ring R

  {0} disebut ***subring trivial***, dan R disebut ***subring tak sejati***. Subring selain {0} dan R disebut ***subring sejati***.

- {0,2,4} adalah subring dari ring $\mathbb{Z}_6$
- Himpunan $n\mathbb{Z}$ = {0, ±n, ±2n, ±3n, ...}, dengan n adalah bilangan bulat positif, adalah subring dari ring $\mathbb{Z}$.
- Himpunan matriks segitiga atas dan matriks diagonal merupakan subring dari M_{2x2} (R)

LATIHAN SOAL

1. Diketahui R sebuah ring dan a ada di R. Jika $S = \{ax = 0 \mid x \in R\}$, tunjukkan apakah S subring R atau bukan.
2. Diketahui $S = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Tunjukkan apakah S subring dari $M_{2x2}(\mathbb{Z})$ atau bukan
3. Diketahui $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Buktikan bahwa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ adalah subring dari $\mathbb{Q}$.
4. Prove that T = $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ is a subring of $M_{2x2}(\mathbb{Z})$.

   If T has a unity, determine the unity, and find the units.

II. DAERAH INTEGRAL (*INTEGRAL DOMAIN*) DAN LAPANGAN (*FIELD*)

A. DAERAH INTEGRAL

DEFINISI II.1. Pembagi Nol

Misalkan R ring.

Elemen $a \neq 0 \in R$ dikatakan **pembagi nol** jika terdapat $b \neq 0 \in R$ sehingga $ab = 0$.

<u>CONTOH II.1</u>

a. Perhatikan ring $(\mathbb{Z}, +, .)$

   Ambil $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$.

   Jika $ab = 0$, maka $b = 0$.

   Jadi $(\mathbb{Z}, +, .)$ tidak mempunyai pembagi nol karena tidak ada $b \neq 0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $ab = 0$.

b. Perhatikan ring $M_{2x2}(\mathbb{R})$

   Ambil matriks tak nol $AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

   Terdapat $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

   sehingga $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

   Jadi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah pembagi nol.

DEFINISI II.2. Daerah Integral (*Integral Domain*)

Misalkan R ring komutatif yang mempunyai elemen satuan (identitas perkalian).

R disebut **daerah integral** jika R tidak memuat pembagi nol.

Karena daerah integral tidak memuat integral nol, jika $ab = ba = 0$ maka a = 0 atau b = 0.

CONTOH II.2

a. $(\mathbb{Z}, +, .)$ adalah daerah integral
b. Ring $M_{2x2}(\mathbb{R})$ bukan daerah integral
c. Ring $\mathbb{Z}_n$ adalah daerah integral jika n adalah bilangan prima.
   Ring $\mathbb{Z}_n$ bukan daerah integral jika n bukan bilangan prima.

CONTOH II.3

Tunjukkan apakah $\mathbb{Z}_4$ daerah integral atau bukan.

Penyelesaian:

$\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$

Tabel Cayley dari $(\mathbb{Z}_4, .)$

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_4$ mempunyai pembagi nol yaitu 2, karena 2.2 = 0.

Jadi $\mathbb{Z}_4$ **bukan** merupakan daerah integral.

TEOREMA II.1

Misal *a, b, c* adalah anggota daerah integral R. Jika $a \neq 0$ dan $ab = ac$, maka $b = c$.

Bukti:

Diketahui *a, b, c* adalah anggota daerah integral R, $a \neq 0$

$ab = ac$

$ab - ac = ac - ac$

$ab - ac = 0$

$a(b - c) = 0$

Karena R adalah daerah integral dan $a \neq 0$, maka $(b - c) = 0$.

Jadi $b = c$.

B. LAPANGAN

DEFINISI II.3. Lapangan (*Field*)

Ring komutatif R disebut lapangan *(field)* jika ring tersebut mempunyai elemen satuan (identitas perkalian) dan setiap anggotanya yang tak nol mempunyai invers.

Dari definisi di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa syarat sebuah ring R dikatakan lapangan *(field)* adalah:

1. R komutatif
2. R mempunyai elemen satuan (identitas perkalian)
3. R merupakan ring pembagian

TEOREMA II.2

Jika R adalah lapangan, maka R merupakan daerah integral.

Bukti:

Field → ring komutatif

→ mempunyai elemen satuan (identitas perkalian)

Daerah integral → ring komutatif

→ mempunyai elemen satuan (identitas perkalian)

→ tidak memuat pembagi nol

Untuk membuktikan R suatu integral, maka akan dibuktikan R tidak mempunyai pembagi nol.

Ambil $a, b \in$ lapangan R, dengan $a \neq 0$ dan $ab = 0$.

Jelas $a^{-1} \in lapangan\ R$

$ab = 0$

$a^{-1}.(ab) = a^{-1}.0$ $\quad$ $(kalikan\ kedua\ ruas\ dengan\ a^{-1})$

$(a^{-1}.a)b = 0$

$1.b = 0$

$b = 0$

Jadi jika $a \neq 0$ diperoleh $b = 0$. Ini berarti R tidak mempunyai pembagi nol.

Jadi R merupakan daerah integral.

TEOREMA II.3

Setiap daerah integral berhingga merupakan lapangan.

Bukti:

Daerah integral → ring komutatif

→ mempunyai elemen satuan (identitas perkalian)

Field → ring komutatif

→ mempunyai elemen satuan (identitas perkalian)

→ ring pembagian (setiap elemen tak nol mempunyai invers)

Akan dibuktikan bahwa setiap elemen tak nol pada daerah integral mempunyai invers

Misalkan D adalah daerah integral dengan identitas 1 yang semua elemennya berbeda.

$D = \{0,1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

Ambil $a \in D, a \neq 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\forall a \neq 0 \in D, \exists\ b \neq 0\ \in D \ni ab = 1$.

Dengan mengalikan a dengan semua anggota D, diperoleh

$a. D = \{0, a, aa_1, aa_2, aa_3, \dots, aa_n\}$

Andaikan $a. a_i = a. a_j$ maka $a_i = a_j$

kontradiksi dengan yang diketahui bahwa D memiliki elemen-elemen yang berbeda.

Jadi pengandaian salah, yang benar adalah $a. a_i \neq a. a_j$.

Jadi elemen-elemen $a. D$ adalah elemen-elemen yang berbeda dan tak nol.

Karena D berhingga dan $a. D \subset D$, jadi haruslah $a. D = D$

Jadi $a. D$ juga memuat elemen satuan 1.

Akibatnya, diantara anggota-anggota $a. D$ ada yang sama dengan 1.

Jika $a = 1$ maka invers dari a = 1 adalah 1.

Untuk $a \neq 1$,

$aa_i = 1$ jadi terdapat a_i yang merupakan invers dari a.

Jadi D adalah lapangan.

Akibat:

Ring Z_n adalah sebuah lapangan jika n adalah bilangan prima.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa Z_n adalah daerah integral (tidak punya pembagi nol).

Misal $a, b \in Z_n$ dan $ab = 0$.

Maka $ab = nk$ untuk $k \in \mathbb{Z}$.

Lemma Euclid, "*jika bilangan prima p membagi ab, maka p membagi a atau p membagi b*"

$n|a \Leftrightarrow a = 0 \bmod n \Leftrightarrow a = 0$

$n|b \Leftrightarrow b = 0 \bmod n \Leftrightarrow b = 0$

jadi Z_n adalah sebuah daerah integral.

<u>CONTOH II.4</u>

a. $(\mathbb{Z}, +, .)$ bukan lapangan karena tidak semua elemen di $\mathbb{Z}$ mempunyai invers di $\mathbb{Z}$
b. $(\mathbb{Q}, +, .)$ adalah lapangan
c. Ring $\mathbb{Z}_n$ adalah lapangan jika n adalah bilangan prima.

LATIHAN SOAL

1. Tunjukkan bahwa ring R = {0,2,4,6,8} dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 10 merupakan sebuah field.
2. Tunjukkan bahwa ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah daerah integral dan juga field.

C. KARAKTERISTIK RING

DEFINISI II.4. Karakteristik Sebuah Ring

Diketahui ring (R,+,.)

Karakteristik sebuah ring R adalah bilangan bulat positif terkecil n sehingga $na = 0_R$ untuk semua $a \in R$.

Jika tidak ada n yang memenuhi, maka dikatakan R mempunyai karakteristik 0.

CONTOH II.5

Diketahui ring $(\mathbb{Z}_3, +, .)$.

Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$, $3a = 0$.

Jadi karakteristik ring $\mathbb{Z}_3$ adalah 3.

Karakteristik ring $\mathbb{Z}$ adalah 0 karena tidak ada bilangan bulat positif n sehingga $na = 0$ untuk $a \in \mathbb{Z}$.

TEOREMA II.4. Karakteristik Ring dengan Elemen Satuan

Misalkan R adalah ring yang mempunyai elemen satuan 1.

Jika 1 mempunyai orde tak hingga terhadap penjumlahan, maka karakteristik R adalah 0.

Jika 1 mempunyai orde n terhadap penjumlahan, maka karakteristik R adalah n.

Bukti:

Jika 1 memiliki orde tah hingga, maka tidak ada bilangan bulat positif n sehingga $n.1$=0.

Jadi R mempunyai karakteristik 0.

Misal 1 memiliki orde n, maka n.1 = 0 dimana n adalah bil. bulat positif terkecil.

Jadi untuk setiap $x \in R$,

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\text{sebanyak n}} = \underbrace{1x + 1x + \cdots + 1x}_{\text{sebanyak n}} = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{\text{sebanyak n}}x = 0x = 0$$

Oleh karena itu, karakteristik R adalah n.

TEOREMA II.5

Karakteristik sebuah daerah integral adalah 0 atau bilangan prima.

Bukti:

Misal 1 memiliki orde berhingga terhadap penjumlahan.

Misal $|1| = n$ dan $n = s.t$ dengan $1 \leq s.t \leq n$.

Ingat Lemma: *Jika* $m, n \in \mathbb{Z}$ *dan* $a, b \in$ *Ring R, maka (m.a)(n.b) = (mn).(ab)*

0 = n.1 = (st).1 = (s.1)(t.1)

Karena R sebuah daerah integral, maka s.1 = 0 atau t.1 = 0.

Karena *n* adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga n.1 = 0, maka haruslah s = n atau t = n.

Jadi n bilangan prima.

Teori pembagi nol dalam ring memberikan alternatif penyelesaian yang berbeda pada suku banyak yang koefisiennya adalah anggota ring.

Contoh.

Tentukan penyelesaian dari persamaan $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$$

Dalam bilangan bulat, penyelesaian persamaan tersebut adalah x = 2 atau x = 4.

Jika kita menyelesaikan persamaan tersebut di $\mathbb{Z}_8$, maka x = 2 atau x = 4 juga merupakan penyelesaian persamaan tersebut. Namun, ada penyelesaian selain x = 2 atau x = 4. Untuk mendapatkan penyelesaian di $\mathbb{Z}_8$ yang lain, kita bisa mensubstitusi setiap anggota $\mathbb{Z}_8$ ke persamaan $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

x = 0 → $0^2 - 6.0 + 8 = 0 \text{ mod } 8$

x = 1 → $1^2 - 6.1 + 8 = 3 \text{ mod } 8$

x = 2 → $2^2 - 6.2 + 8 = 0 \text{ mod } 8$

x = 3 → $3^2 - 6.3 + 8 = -1 = 7 \text{ mod } 8$

x = 4 → $4^2 - 6.4 + 8 = 0 \text{ mod } 8$

x = 5 → $5^2 - 6.5 + 8 = 3 \text{ mod } 8$

x = 6 → $6^2 - 6.6 + 8 = 0 \text{ mod } 8$

x = 7 → $7^2 - 6.7 + 8 = 7 \text{ mod } 8$

Jadi, solusi persamaan tersebut di $\mathbb{Z}_8$ adalah {0, 2, 4, 6}

Jika kita mencari solusi persamaan tersebut di $\mathbb{Z}_5$, solusi yang didapatkan akan berbeda. Karena $\mathbb{Z}_5$ adalah integral domain, maka $(x-2)(x-4)$ akan nol jika $(x-2)=0$ atau $(x-4)=0$. Jadi solusi persamaan $x^2-6x+8=0$ di $\mathbb{Z}_5$ adalah $\{2,4\}$.

Jadi, jika $\mathbb{Z}_n$ adalah integral domain, maka dengan pemfaktoran kita bisa mendapatkan semua solusi persamaan suku banyak tersebut karena dalam integral domain jika ab = 0, maka a = 0 atau b = 0.

Berikut adalah rangkuman ring dan sifat-sifatnya.

Tabel 1. Ring dan Sifat-Sifatnya

No	Ring	Elemen satuan	Ring komutatif	Ring pembagian	Pembagi nol	Daerah Integral	Lapangan	Karakteristik
1	$\mathbb{Z}$	1	✓	x	Tdk ada	✓	x	0
2	$\mathbb{R}$	1	✓	✓	Tdk ada	✓	✓	0
3	$\mathbb{Q}$	1	✓	✓	Tdk ada	✓	✓	0
4	$\mathbb{C}$	1	✓	✓	Tdk ada	✓	✓	0
5	$\mathbb{Z}_n$, n bil. komposit	1	✓	x	Ada	x	x	n
6	$\mathbb{Z}_n$, n bil. prima	1	✓	✓	Tdk ada	✓	✓	n
7	$n\mathbb{Z}$, n>1	Tdk punya	✓	x	Tdk ada	x	x	0
8	$M_{2x2}(\mathbb{Z})$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	x	x	Ada	x	x	0
9	$M_{2x2}(2\mathbb{Z})$	Tdk punya	x	x	Ada	x	x	0
10	$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$	$1+0\sqrt{2}$	✓	x	Tdk ada	✓	x	0
11	$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$	$1+0\sqrt{2}$	✓	✓	Tdk ada	✓	✓	0

D. ELEMEN NILPOTEN DAN IDEMPOTEN

DEFINISI II.5. Elemen Nilpoten

Misal R ring dengan elemen satuan, dan a anggota R.

a adalah elemen nilpoten jika $a^n = 0$ untuk n bilangan bulat positif.

<u>CONTOH II.6</u>

Di $\mathbb{Z}_{24},\ x^n = 0\ (mod\ 24)$ jika dan hanya jika $3|x$ dan $2|x$.

Jadi, elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_{24}$ adalah {0, 6, 12, 18}

DEFINISI II.6. Elemen Idempoten

Misal R ring dan a anggota R. a adalah elemen idempoten jika $a^2 = a$.

<u>CONTOH II.7</u>

1. Contoh elemen idempoten di $M_{2x2}(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Karena $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Contoh elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{12}$

   $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

   Cari elemen $a \in \mathbb{Z}_{12}$, sehingga $a^2 = a$

   $a^2 = a \Leftrightarrow a^2 - a = 12k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$

   Setelah diperiksa, diperoleh elemen idempoten dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah {0,1,4,9}

3. Elemen idempoten di $\mathbb{R}$ yaitu {0,1} karena 0.0 = 0 dan 1.1 = 1

4. Carilah elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{11}$

III. IDEAL DAN FAKTOR RING

A. IDEAL

DEFINISI III.1. Ideal

Misal A subring R.

A disebut ideal (dua sisi) R jika untuk setiap $r \in R$ dan $a \in A$ maka $ar, ra \in A$.

A disebut ***ideal kiri*** jika hanya memenuhi $ra \in A$ untuk setiap $r \in R$ dan $a \in A$.

A disebut ***ideal kanan*** jika hanya memenuhi $ar \in A$ untuk setiap $r \in R$ dan $a \in A$.

<u>CONTOH III.1</u>

Diketahui $3\mathbb{Z} = \{3a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ subring dari $\mathbb{Z}$.

Ambil $3a \in 3\mathbb{Z}$, dan $r \in \mathbb{Z}$

$r(3a) = (3a)r = 3(ar) \ \in \ 3\mathbb{Z}$

Jadi $3\mathbb{Z}$ adalah ideal (dua sisi) dari $\mathbb{Z}$.

<u>CONTOH III.2</u>

Diketahui $K = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} | x, y \ \in \ \mathbb{R}\right\}$ subring dari $M_{2x2}(\mathbb{R})$

Ambil $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in K$ dan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax + by \\ 0 & cx + dy \end{pmatrix} \ \in \ K$

Jadi $K = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} | x, y \ \in \ \mathbb{R}\right\}$ adalah ideal kiri dari $M_{2x2}(\mathbb{R})$

<u>CONTOH III.3</u>

Diketahui $L = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | p, q \ \in \ \mathbb{R}\right\}$ subring dari $M_{2x2}(\mathbb{R})$

Ambil $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L$ dan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \in \ L$

Jadi $L = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | p, q \ \in \ \mathbb{R}\right\}$ adalah ideal kanan dari $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

CONTOH III.4

$\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ ring polinomial dengan koefisien bilangan riil dan A himpunan bagian dari polinomial dengan konstanta 0. A adalah ideal dari $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$.

$(x^3 + 5x^2 - 2x + 7) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ dan $(2x^2 + 7x) \in A$

$(x^3 + 5x^2 - 2x + 7)(2x^2 + 7x) \in A$ dan

$(2x^2 + 7x)(x^3 + 5x^2 - 2x + 7) \in A$

$\mathbb{Z}[\boldsymbol{x}]$ ring polinomial dengan koefisien bilangan bulat dan I himpunan bagian dari polinomial dengan konstanta bilangan genap. I adalah ideal dari $\mathbb{Z}[\boldsymbol{x}]$.

Pada ring R, $\{0\}$ dan R merupakan ideal dari R. $\{0_R\}$ disebut ***ideal trivial***, dan R disebut ***ideal tak sejati***. Ideal selain itu disebut ***ideal sejati***.

Pada definisi disebutkan bahwa A subring R. Oleh karena itu, A haruslah memenuhi teorema uji subring yaitu A tertutup terhadap pengurangan dan perkalian.

TEOREMA III.1. Uji Ideal

Sebuah himpunan tak kosong A adalah ideal dari R jika:

1. $a - b \in A$ jika $a, b \in A$ (tertutup terhadap pengurangan)
2. $ra, ar \in A$ dimana $a \in A$ dan $r \in R$

CONTOH III.5

Buktikan $3\mathbb{Z} = \{3a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ideal dari $\mathbb{Z}$.

1) Akan dibuktikan $3a - 3b \in 3\mathbb{Z}$ untuk setiap $3a, 3b \in 3\mathbb{Z}$

   $3a - 3b = 3(a - b)$

   Karena $(a - b) \in \mathbb{Z}$ maka $3(a - b) \in 3\mathbb{Z}$

   Jadi, $3a - 3b \in 3\mathbb{Z}$ untuk setiap $3a, 3b \in 3\mathbb{Z}$ (tertutup terhadap pengurangan)

2) Akan dibuktikan $r(3a) = (3a)r \in 3\mathbb{Z}$ dimana $3a \in 3\mathbb{Z}$, dan $r \in \mathbb{Z}$

   Ambil $3a \in 3\mathbb{Z}$, dan $r \in \mathbb{Z}$

   $r(3a) = (3a)r = 3(ar) \in 3\mathbb{Z}$

   Jadi $3\mathbb{Z}$ adalah ideal (dua sisi) dari $\mathbb{Z}$.

Tunjukkan apakah $\mathbb{Z}$ ideal dari $\mathbb{Q}$ atau bukan

Tunjukkan apakah $\mathbb{Z}$ ideal dari $\mathbb{R}$ atau bukan

TEOREMA III.2

Diketahui A ideal dari ring R. Jika ideal A memuat 1, maka A = R.

Bukti:

Diketahui $A \subset R$. Misalkan $1 \in A$.

Ambil sembarang $r \in R$.

Karena A ideal, maka berdasarkan definisi ideal, berlaku:

$r.1 \in A \ \Leftrightarrow r \in A$

Karena r adalah sembarang elemen di R, maka $R \subset A$.

Karena $A \subset R$ dan $R \subset A$, maka $R = A$

TEOREMA III.3

Jika A_1 dan A_2 adalah ideal dari R, maka $A_1 \cap A_2$ juga merupakan ideal R.

Bukti:

A_1 adalah ideal dari ring R, maka A_1 subgrup R terhadap operasi yang pertama.

A_2 adalah ideal dari ring R, maka A_2 subgrup R terhadap operasi yang kedua.

Jadi $A_1 \cap A_2$ adalah subgrup dari R.

Sehingga berlaku $\forall a, b \in A_1 \cap A_2$ berlaku $(a - b) \in A_1 \cap A_2$.

Ambil sembarang $a \in A_1 \cap A_2$, maka $a \in A_1$ dan $a \in A_2$

Ambil $r \in R$, maka

$ar \in A_1$ dan $ra \in A_1$ karena A_1 ideal dari R.

$ar \in A_2$ dan $ra \in A_2$ karena A_2 ideal dari R.

Karena $ar \in A_1$ dan $ar \in A_2$ maka $ar \in A_1 \cap A_2$

Karena $ra \in A_1$ dan $ra \in A_2$ maka $ra \in A_1 \cap A_2$

Jadi $A_1 \cap A_2$ adalah ideal dari R.

Ada sebuah cara untuk menemukan ideal dari sebuah himpunan. Salah satunya adalah dengan himpunan yang dibangun oleh a, atau disimbolkan dengan <a>.

DEFINISI III.2. Ideal Utama

Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan dan $a \in R$. Ideal $A = \{ra \mid r \in R\}$ disebut ideal utama (*principal ideal*) yang dibangun oleh a dan disimbolkan dengan $< a >$.

Dengan kata lain $< a >$ adalah kelipatan dari semua a dengan sebarang elemen $r \in R$

CONTOH III.6

Diketahui $\mathbb{Z}$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

$< 3 > = \{z.3 \mid z \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$ merupakan ideal utama dalam $\mathbb{Z}$.

Secara umum, $n\mathbb{Z}$ adalah ideal $\mathbb{Z}$ untuk $n \geq 1$. Jadi $I = < n >$ adalah ideal utama yang dibangun oleh n

CONTOH III.7

Diketahui $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu:

$< 0 > = \{0\}$

$< 1 > = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$< 2 > = \{z.2 \mid z \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,2,4\}$

$< 3 > = \{z.3 \mid z \in \mathbb{Z}_6\} = \{0, 3\}$

$< 4 > = < 2 >$

$< 5 > = < 1 >$

CONTOH III.8

Diketahui $\mathbb{Z}_4$ x $\mathbb{Z}_6$ ring. Tentukan ideal yang dibangun oleh $< (2,2) >$

$< (2,2) > = \{r.(2,2) \mid r \in \mathbb{Z}_4 \text{ x } \mathbb{Z}_6\}$

Jika $(a, b) \in \mathbb{Z}_4$ x $\mathbb{Z}_6$ maka $(a, b)\ x\ (2,2) = (2a, 2b)$

$< (2,2) > = \{(0,0), (2,2), (0,4), (2,0), (0,2), (2,4)\}$

DEFINISI III.3. Ideal Prima dan Ideal Maksimal

1. Misalkan R adalah ring komutatif. Ideal sejati A disebut ideal prima di R jika $\forall\, a, b \in R,\ ab \in A \Rightarrow a \in A$ atau $b \in A$.
2. Misalkan R adalah ring komutatif dan A adalah ideal sejati dari R. A disebut ideal maksimal jika ada ideal B dan $A \subseteq B \subseteq R$ maka $B = A$ atau $B = R$.

   Dengan kalimat lain:

   Misalkan R adalah ring komutatif dan A adalah suatu ideal dari R dengan A ≠ R. A disebut ideal maksimal dari R, jika tidak ada ideal yang memuat A selain A dan R sendiri.

<u>CONTOH III.9</u>

1. Ideal <3> = {3x | x ∈ ℤ } adalah ideal maksimal dalam ℤ, sebab <3> tidak termuat dalam ideal lainnya kecuali <3> sendiri dan ℤ.
2. Ideal <6> = {6x | x ∈ ℤ } bukan ideal maksimal dalam Z, sebab <6> termuat dalam ideal <2> = {2x | x ∈ ℤ } dan dalam ideal <3> = {3x | x ∈ ℤ } di ℤ.
3. Ideal <5> = {5x | x ∈ ℤ } adalah ideal prima dalam ℤ, sebab jika a.b ∈ <5>, maka 5|ab dan karenanya 5|a atau 5|b (ingat bahwa 5 adalah prima).
4. Ideal <6> = {6x | x ∈ ℤ } adalah bukan ideal prima di ℤ karena ∃ 12 ∈ ℤ dan 12 = 3 x 4, sedangkan 3 ∉ ℤ dan 4 ∉ ℤ

- $< a > = \{n.a | n \in \mathbb{Z}\}$ adalah ideal prima dan ideal maksimal dari ℤ jika a bil. prima.
- Dalam ring komutatif disertai elemen satuan, setiap ideal maksimal adalah ideal prima.

5. Ideal sejati dari ring $\mathbb{Z}_{12}$ adalah:

   <2> = {0, 2, 4, 6, 8, 10}

   <3> = {0, 3, 6, 9}

   <4> = {0, 4, 8}

   <6> = {0, 6}

   <2> dan <3> merupakan ideal prima dan ideal maksimal (*jelaskan alasannya!*)

   <4> dan <6> bukan merupakan ideal prima dan ideal maksimal (*jelaskan alasannya!*)

B. RING FAKTOR

DEFINISI III.4 – Koset

Diketahui R ring dan A ideal dari R. Jika $r \in R$, maka **koset** $\boldsymbol{R/A}$ (dibaca R mod A) didefinisikan oleh $R/A = \{r + A \mid r \in R\}$.

Anggota-anggota R/A berbentuk $r + A$ dan disimbolkan dengan $\bar{r}$

<u>CONTOH III.10</u>

Diketahui ring $\mathbb{Z}$ dan ideal $5\mathbb{Z}$. Koset $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{r + 5\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{0} = 0 + 5\mathbb{Z}$

$\bar{1} = 1 + 5\mathbb{Z}$

$\bar{2} = 2 + 5\mathbb{Z}$

$\bar{3} = 3 + 5\mathbb{Z}$

$\bar{4} = 4 + 5\mathbb{Z}$

Jadi, koset $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0 + 5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ sama dengan kelas ekuivalensi modulo 5.

DEFINISI III.5. Ring Faktor

Misal A adalah ideal dari ring R. Himpunan koset $R/A = \{r + A \mid r \in R\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut:

1. $(r + A) + (s + A) = (r + s) + A$
   $\forall\ (r + A), (s + A) \in R/A$
2. $(r + A)(s + A) = rs + A,$
   $\forall\ (r + A), (s + A) \in R/A$

disebut ring faktor dari R oleh ideal A.

Bukti:

Untuk membuktikan apakah R/A sebuah ring, maka R/A harus memenuhi semua sifat-sifat ring.

a. Penjumlahan koset R/A bersifat tertutup
   Ambil $(r + A), (s + A) \in R/A$

$(r + A)(s + A) = (r + s) + A$

Karena $r, s \in R$, maka $(r + s) + A \in R/A$

b. Penjumlahan koset R/A bersifat komutatif

Ambil $(r + A), (s + A) \in R/A$

$$\begin{aligned}(r + A)(s + A) &= (r + s) + A \\ &= (s + r) + A \\ &= (s + A)(r + A)\end{aligned}$$

c. R/A bersifat asosiatif terhadap penjumlahan (diturunkan dari sifat ring R)

Ambil $(r + A), (s + A), (t + A) \in R/A$

$$\begin{aligned}[(r + A) + (s + A)] + (t + A) &= [(r + s) + A] + (t + A) \\ &= \big((r + s) + t\big) + A \\ &= \big(r + (s + t)\big) + A \\ &= (r + A) + [(s + t) + A)] \\ &= (r + A) + [(s + A) + (t + A)]\end{aligned}$$

d. R/A mempunyai identitas penjumlahan, yaitu $(0 + A)$.

Ambil $(r + A) \in R/A$

$$\begin{aligned}(r + A) + (0 + A) &= (r + 0) + A \\ &= r + A\end{aligned}$$

e. Semua $(r + A) \in R/A$ mempunyai invers pada penjumlahan yaitu $(-r + A)$.

$$\begin{aligned}(r + A) + (-r + A) &= \big(r + (-r)\big) + A \\ &= 0 + A\end{aligned}$$

f. R/A bersifat asosiatif terhadap perkalian (diturunkan dari sifat ring R)

Ambil $(r + A), (s + A), (t + A) \in R/A$

$$\begin{aligned}[(r + A)(s + A)].(t + A) &= [(r.s) + A].(t + A) \\ &= \big((r.s).t\big) + A \\ &= \big(r.(s.t)\big) + A \\ &= (r + A)[(s.t) + A)] \\ &= (r + A)[(s + A).(t + A)]\end{aligned}$$

g. R/A bersifat distributif (diturunkan dari sifat ring R)

Ambil $(r + A), (s + A), (t + A) \in R/A$

$$\begin{aligned}[(r + A) + (s + A)].(t + A) &= [(r + s) + A].(t + A) \\ &= \big((r + s).t\big) + A\end{aligned}$$

$$= (r.t + s.t) + A$$
$$= ((r.t) + A) + ((s.t) + A)$$
$$= (r + A)(t + A) + (s + A)(t + A)$$
$$(r + A).[(s + A) + (t + A)] = (r + A).[(s + t) + A]$$
$$= \big(r.(s + t)\big) + A$$
$$= (r.s + r.t) + A$$
$$= ((r.s) + A) + ((r.t) + A)$$
$$= [(r + A)(s + A)] + [(r + A)(t + A)]$$

Dari poin (a) sampai (g), jadi disimpulkan bahwa R/A membentuk sebuah ring.

<u>CONTOH III.11</u>

Diketahui $\mathbb{Z}$ adalah ring, dan $5\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$.

Terbentuk ring faktor $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ r + 5\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Z}\}$

$$= \{0 + 5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$$

$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

<u>CONTOH III.12</u>

Diketahui $2\mathbb{Z}$ adalah ring, dan $6\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$.

$0 + 6\mathbb{Z} = \{0, \pm 6, \pm 12, \dots\}$

$2 + 6\mathbb{Z} = \{\dots, -4, 2, 8, 14, \dots\}$

$4 + 6\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 4, 10, 16, \dots\}$

Terbentuk ring faktor $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ 2r + 6\mathbb{Z} \mid 2r \in 2\mathbb{Z}\}$

$$= \{0 + 6\mathbb{Z}, 2 + 6\mathbb{Z}, 4 + 6\mathbb{Z}\}$$

<u>CONTOH III.13</u>

Himpunan $\mathbb{Z}_8$ = { 0, 1, 2, …, 7} merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 8. Ideal-ideal dalam Z8 adalah

<0> = { 0 }

<1> = <3> = <5> = <7> = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

<2> = { 0, 2, 4, 6 }

<4> = { 0, 4 }.

Ideal I = <2> merupakan ideal sejati dari $\mathbb{Z}_8$. Ring faktor $\mathbb{Z}_8/I$ yang terbentuk adalah $\mathbb{Z}_8/I = \{r + A \mid r \in \mathbb{Z}_8\}$

0 + I = {0, 2, 4, 6}

1 + I = {1, 3, 5, 7}

2 + I = {0, 2, 4, 6} = 0 + I

3 + I = {1, 3, 5, 7} = 1 + I

4 + I = {0, 2, 4, 6} = 0 + I

5 + I = {1, 3, 5, 7} = 1 + I

6 + I = {0, 2, 4, 6} = 0 + I

7 + I = {1, 3, 5, 7} = 1 + I

Hal itu berarti $\mathbb{Z}_8/I$ hanya berisi 2 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_8/I = \{0 + I, 1 + I\}$

<u>CONTOH III.14</u>

Jika $K = \{0,2,4\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Tentukan $\mathbb{Z}_6/K$ dan buktikan bahwa $\mathbb{Z}_6/K$ ring faktor.

Penyelesaian:

0 + K = {0, 2, 4} = 2 + K = 4 + K

1 + K = {1, 3, 5} = 3 + K = 5 + K

Jadi $\mathbb{Z}_6/K$ = { 0+ K, 1 + K}

Bukti bahwa $\mathbb{Z}_6/K$ adalah sebuah ring:

Tabel cayley $\mathbb{Z}_6/K$

+	K	1+K
K	K	1+K
1+K	1+K	K

.	K	1+K
K	K	K
1+K	K	1+K

(i) Dari tabel cayley, dapat disimpulkan $\mathbb{Z}_6/K$ tertutup terhadap penjumlahan

$\forall\, K, K + 1 \in \mathbb{Z}_6/K$

$K + K = (0 + 0) + K = K$

$K + (1 + K) = (0 + 1) + K = 1 + K$

$(1 + K) + (1 + K) = (1 + 1) + K = K$

(ii) $\mathbb{Z}_6/K$ asosiatif terhadap penjumlahan

$\forall\, K, K+1 \in \mathbb{Z}_6/K$

[K + (1+K)] + (1+K) = [(0+1)+K] + (1+K)

= ((0+1)+1) + K

= (0+(1+1)) + K

= (0+K) + [(1+1) + K]

= K + [(1+K) + (1+K)]

(iii) $\mathbb{Z}_6/K$ mempunyai identitas terhadap penjumlahan, yaitu (0+K)

$\forall\, K, K+1 \in \mathbb{Z}_6/K$

$(0+K)+(0+K)=(0+0)+K=0+K$

$(1+K)+(0+K)=(1+0)+K=1+K$

(iv) $\mathbb{Z}_6/K$ mempunyai invers terhadap penjumlahan

Perhatikan tabel cayley penjumlahan.

Invers dari K adalah K karena K + K = K

Invers dari (1+K) adalah (1+K) karena (1+K) + (1+K) = K

(v) $\mathbb{Z}_6/K$ komutatif terhadap penjumlahan

$\forall\, K, K+1 \in \mathbb{Z}_6/K$

$K+(1+K)=(0+1)+\ K$

$=(1+0)+\ K$

$=(1+K)+K$

(vi) $\mathbb{Z}_6/K$ asosiatif terhadap perkalian

$\forall\, K, K+1 \in \mathbb{Z}_6/K$

[K . (1+K)] . (1+K) = [(0.1)+K] . (1+K)

= ((0.1).1) + K

= (0.(1.1)) + K

= (0+K) . [(1.1) + K]

= K . [(1+K) . (1+K)]

(vii) $\mathbb{Z}_6/K$ distributif

K . [(1+K) + (1+K)] = K. [(1+1)+K]

= (0.(1+1)) + K

= ((0.1)+(0.1)) + K

= K.(1+K) + K.(1+K)

Jadi $\mathbb{Z}_6/K$ adalah sebuah ring.

TEOREMA III.4

1. Jika ring R komutatif dan A ideal dari R, maka R/A juga komutatif.
2. Jika ring R mempunyai elemen satuan e, maka R/A memiliki elemen satuan (e+R)
3. Misalkan R suatu ring komutatif dan A ideal dari R. Maka ring faktor R/A membentuk suatu lapangan jika dan hanya jika A merupakan ideal maksimal.
4. Misalkan R suatu ring komutatif dan A ideal dari R. Maka ring faktor R/A membentuk suatu daerah integral jika dan hanya jika A merupakan ideal prima.

LATIHAN SOAL

1. Tunjukkan apakah $\mathbb{Q}$ ideal dari R atau bukan.
2. Tentukan ideal utama ring $M_{2x2}(\mathbb{R})$ yang dibangun oleh $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Diketahui ring $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ring komutatif. Tunjukkan bahwa $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ideal dalam M.
4. Diketahui ring $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ring. Tunjukkan apakah $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ideal (kiri/kanan/dua sisi) dalam N.
5. Tentukan semua ideal sejati dari $\mathbb{Z}_{12}$ dan tentukan mana yang merupakan ideal prima dan ideal maksimal.
6. Diketahui $S = (2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ adalah subring dari $\mathbb{Z}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Tunjukkan apakah S ideal dari $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ atau bukan.
7. Tentukan ring faktor $\mathbb{Z}_{10}/I$ dan $\mathbb{Z}_{10}/J$ dimana I = <2> dan J = <5>.
   a. Tentukan apakah $\mathbb{Z}_{10}/I$ dan $\mathbb{Z}_{10}/J$ daerah integral?
   b. Tentukan apakah $\mathbb{Z}_{10}/I$ dan $\mathbb{Z}_{10}/J$ lapangan?
8. $3\mathbb{Z}$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat, dan $12\mathbb{Z}$ adalah ideal dari $3\mathbb{Z}$. Tentukan ring faktor $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
   a. Tentukan apakah $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ daerah integral?
   b. Tentukan apakah $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ lapangan?

IV. HOMOMORFISMA RING

A. HOMOMORFISMA RING

DEFINISI IV.1. Homomorfisma

Misal R dan S adalah ring.

Sebuah homomorfisma ring φ dari ring R ke ring S adalah sebuah fungsi dari R ke S yang mengawetkan dua operasi berikut.

$\forall\, a, b \in R \qquad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\qquad\qquad\qquad \varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$

Catatan:

1. Operasi di ruas kiri, yaitu $\varphi(a+b)$ dan $\varphi(ab)$, adalah operasi pada R.
   Operasi di ruas kanan, yaitu $\varphi(a) + \varphi(b)$ dan $\varphi(a).\varphi(b)$, adalah operasi pada S.
2. Operasi pada R dan S ***tidak harus sama***, baik penjumlahan maupun perkaliannya.
3. Untuk membuktikan φ homomorfisma, haruslah dibuktikan dulu φ suatu fungsi, jika belum diketahui fungsi.
   $\varphi : R \rightarrow S$ disebut fungsi jika $\forall$a, b $\in$ R , (a = b) $\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$

CONTOH IV.1

$(\mathbb{Z}, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat.

$(2\mathbb{Z}, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat dan operasi (.) yang didefinisikan oleh: $\forall\, a, b \in 2\mathbb{Z}, a.b = \frac{ab}{2}$

Pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $\varphi(x) = 2x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan φ sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $2\mathbb{Z}$.

Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka

$\varphi(a+b) = 2(a+b)$

$\qquad\qquad = 2a + 2b$

$\varphi(a) + \varphi(b) = 2a + 2b$

Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(a.b) = 2ab$

$\varphi(a).\varphi(b) = \frac{2a.2b}{2} = 2ab$

Jadi $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$

Jadi φ sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $2\mathbb{Z}$.

<u>CONTOH IV.2</u>

$I = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bil. kompleks

$M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

Pemetaan $\varphi: I \to M$ didefinisikan oleh $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Akan ditunjukkan φ homomorfisma dari I ke M.

Ambil $\forall\, s, t \in I$ dengan $s = a + bi$ dan $t = c + di$

$$\begin{aligned} \varphi(s + t) &= \varphi\big((a + bi) + (c + di)\big) \\ &= \varphi\big((a + c) + (b + d)i\big) \\ &= \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) + \varphi(t) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(s + t) = \varphi(s) + \varphi(t)$

$$\begin{aligned} \varphi(s.t) &= \varphi\big((a + bi).(c + di)\big) \\ &= \varphi\big((ac - bd) + (ad + bc)i\big) \\ &= \begin{pmatrix} ac - bc & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(s).\varphi(t) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bc & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(s.t) = \varphi(s).\varphi(t)$

Jadi φ sebuah homomorfisma dari I ke M.

CONTOH IV.3

$\mathbb{Z}$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat.

$\mathbb{Z}_n$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bil. bulat modulo n.

Pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ didefinisikan oleh $\varphi(x) = (x)_{mod\ n}, \forall\, x \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan φ sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_n$.

Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= (a+b)_{mod\ n} \\ &= (a)_{mod\ n} + (b)_{mod\ n} \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a.b) &= (ab)_{mod\ n} \\ &= (a)_{mod\ n}.(b)_{mod\ n} \\ &= \varphi(a).\varphi(b) \end{aligned}$$

Jadi φ sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_n$.

CONTOH IV.4

Diketahui $\mathbb{Z}_4$ dan $\mathbb{Z}_6$ ring.

Pemetaan $\varphi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6$ didefinisikan oleh $\varphi(x) = (3x)_{mod\ 6}, \forall\, x \in \mathbb{Z}_4$

Akan ditunjukkan φ homomorfisma dari $\mathbb{Z}_4$ ke $\mathbb{Z}_6$.

Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$, maka $a + b = 4k_1 + m_1$ dan $a.b = 4k_2 + m_2$.

$\Leftrightarrow m_1 = a + b - 4k_1$ dan $m_2 = a.b - 4k_2$

Jadi $a + b = (m_1)_{mod\ 4}$ dan $a.b = (m_2)_{mod\ 4}$

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) = \varphi(m_1) &= 3m_1 \\ &= 3(a+b-4k_1) \\ &= (3a+3b-12k_1)_{mod\ 6} \\ &= (3a+3b)_{mod\ 6} \\ &= \varphi(a)+\varphi(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a.b) = \varphi(m_2) &= 3m_2 \\ &= 3(ab-4k_2) \\ &= (3ab-12k_2)_{mod\ 6} \\ &= (3ab)_{mod\ 6} \\ &= (9ab)_{mod\ 6} \\ &= (3a.3b)_{mod\ 6} \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

Jadi φ sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}_4$ ke $\mathbb{Z}_6$.

CONTOH IV.5

Pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\varphi(a) = 2a, \forall a \in \mathbb{Z}$

Akan ditunjukkan φ sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka

$\varphi(a + b) = 2(a + b)$

$\qquad = 2a + 2b$

$\varphi(a) + \varphi(b) = 2a + 2b$

Jadi $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(a.b) = 2ab$

$\varphi(a).\varphi(b) = 2a.2b = 4ab$

Jadi $\varphi(a.b) \neq \varphi(a).\varphi(b)$

Jadi φ merupakan sebuah homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

CONTOH IV.6

Tentukan semua homomorfisma ring dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_6$

Jelas $\mathbb{Z}$ dibangun oleh 1.

Misalkan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfisma, maka $\forall a \in \mathbb{Z}, f(a) = a.m$, dimana $m = f(1)$.

Jelas $f(a + b) = (a + b)m = am + bm = f(a) + f(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}$

Dan $f(ab) = f(a).f(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}$

$f(ab) - f(a).f(b) = 0$

$abm - am.bm = 0$

$ab(m - m^2) = 0$

Jika $ab \neq 0$, maka $(m - m^2)_{mod\ 6} = 0_{mod\ 6}$

$0 - 0^2 = 0$

$1 - 1^2 = 0$

$2 - 2^2 = (-2)_{mod\ 6} = 4$

$3 - 3^2 = (-6)_{mod\ 6} = 0$

$4 - 4^2 = (-12)_{mod\ 6} = 0$

$5 - 5^2 = (-20)_{mod\ 6} = 4$

Jadi nilai m yang mungkin adalah 0, 1, 3, dan 4.

Jadi semua homomorfisma yang mungkin adalah:

$f(a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$

$f(a) = a, \forall a \in \mathbb{Z}$

$f(a) = 3a, \forall a \in \mathbb{Z}$

$f(a) = 4a, \forall a \in \mathbb{Z}$

TEOREMA IV.1 Sifat-Sifat Homorfisma

Misal φ sebuah ring homomorfisma dari ring R ke ring S.

1. $\varphi(0_R) = 0_S$ dengan e adalah identitas pada R, dan e' adalah identitas pada S.
2. $\varphi(1_R) = 1_S$ dimana 1 adalah elemen satuan R, 1' adalah elemen satuan S, dan φ adalah fungsi onto
3. $\varphi(-a) = -\varphi(a),\ \forall\, a \in R$
4. Jika R komutatif, maka $\varphi(R)$ juga komutatif.
5. Jika A subring R, $\varphi(A) = \{\varphi(a) |\ a \in A\}$ adalah subring dari S
6. Jika R mempunyai elemen satuan 1, $S \neq 0$, dan φ adalah fungsi onto, maka $\varphi(1)$ adalah elemen satuan dari S.
7. Untuk setiap $r \in R$ dan n bilangan bulat positif, berlaku $\varphi(nr) = n.\varphi(r)$ dan $\varphi(r^n) = \left(\varphi(n)\right)^n$
8. Jika A adalah ideal dan φ adalah fungsi onto terhadap S, maka $\varphi(A)$ adalah ideal.

B. KERNEL

DEFINISI IV.2. Kernel

Misal $\varphi: R \to S$ adalah suatu homomorfisma, **inti** atau **kernel** dari φ didefinisikan

$$Ker(\varphi) = \{a \in R |\ \varphi(a) = 0_s\}$$

Dimana 0_s adalah identitas penjumlahan pada S.

Kernel dari sebuah homomorfisma tidak mungkin sebuah himpunan kosong.

Dan jika φ adalah fungsi injektif, maka $Ker(\varphi) = \{0_s\}$

TEOREMA IV.2

Jika $\varphi: R \to S$ adalah suatu homomorfisma, maka $Ker(\varphi)$ adalah ideal dari R.

CONTOH IV.7

Diketahui homomorfisma $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ dengan $\varphi(a) = a_{mod\ 5}, \forall a \in \mathbb{Z}$.

$Ker(\varphi) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \varphi(a) = 0_{mod\ 5}\}$

$\qquad = \{a \in \mathbb{Z} \mid a_{mod\ 5} = 0_{mod\ 5}\}$

$a_{mod\ 5} = 0_{mod\ 5} \Leftrightarrow a = 5n \Leftrightarrow a = 5\mathbb{Z}$

Jadi $Ker(\varphi) = 5\mathbb{Z}$

CONTOH IV.8

Dari contoh IV.2,

Diketahui ring $I = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ dan ring

$M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$

Homomorfisma $\varphi: I \to M$ dengan $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

Ambil $x = a + bi\ \in I$

$Ker(\varphi) = \{x \in I \mid \varphi(x) = 0\}$

$\qquad = \{a + bi \in I \mid \varphi(a + bi) = 0\}$

Jelas $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0\ dan\ b = 0$

Jadi $Ker(\varphi) = \{0 + 0i\} = \{0\}$

CONTOH IV.9

Dari contoh IV.4,

Homomorfisma $\varphi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6$ didefinisikan oleh $\varphi(x) = (3x)_{mod\ 6}, \forall\ x \in \mathbb{Z}_4$

Ambil $x \in \mathbb{Z}_4$

$Ker(\varphi) = \{x \in \mathbb{Z}_4 \mid \varphi(x) = 0\}$

$\qquad = \{x \in \mathbb{Z}_4 \mid (3x)_{mod\ 6} = 0\}$

Nilai $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $(3x)_{mod\ 6} = 0$ adalah $2\mathbb{Z}$

Pada $\mathbb{Z}_4$, nilai $2\mathbb{Z}$ senilai dengan $\{0, 2\}$

Jadi $Ker(\varphi) = \{0,2\}$

C. ISOMORFISMA

DEFINISI IV.3

Misal R dan S ring.

Fungsi $\varphi: R \to S$ disebut isomorfisma jika φ adalah suatu fungsi bijektif.

Jika $\varphi: R \to S$ suatu isomorfisma, maka R dikatakan isomorfik dengan S.

Untuk membuktikan suatu homomorfisma φ adalah suatu isomorfisma, maka harus dibuktikan bahwa φ merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif.

$\varphi : R \to S$ disebut injektif jika $\forall\, a, b \in R$, $(a \neq b) \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$

$\varphi : R \to S$ disebut surjektif jika $\forall\, y \in S, \exists\, x \in R$ sehingga $\varphi(x) = y$

DEFINISI IV.4

Misal R dan S ring, dan $\varphi: R \to S$ suatu homomorfisma.

1. φ disebut monomorfisma jika φ adalah fungsi injektif
2. φ disebut epimorfisma jika φ adalah fungsi surjektif
3. φ disebut endomorfisma jika $R = S$
4. φ disebut automorfisma jika $R = S$ dan φ adalah fungsi bijektif

<u>CONTOH IV.10</u>

$I = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ adalah ring dan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ adalah ring.

Pemetaan $\varphi: I \to M$ didefinisikan oleh $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Akan ditunjukkan φ isomorfisma.

- Ambil $(a + bi), (c + di) \in I$.

  Misal $\varphi(a + bi) = \varphi(c + di)$

  $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$

  $\Leftrightarrow a = c \;\; dan \;\; b = d$

  Jadi $(a + bi) = (c + di)$

  Jadi φ injektif.

- Ambil sembarang $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$.

  Akan dibuktikan $\exists\ x \in I$ sehingga $\varphi(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

  Pilih $x = a + bi$, maka jelas $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

  Jadi untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M, \exists\ (a + bi) \in I$ sehingga $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

  Jadi φ surjektif.

Jadi φ sebuah isomorfisma.

LATIHAN SOAL

1. Tunjukkan apakah fungsi φ merupakan homomorfisma atau bukan.
   a. $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\varphi(a) = 4a, \forall a \in \mathbb{Z}$
   b. $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ dengan $\varphi(a) = 4a, \forall a \in \mathbb{Z}$
   c. $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dengan $\varphi(a) = 2^a, \forall a \in \mathbb{R}$
   d. $\varphi: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_5$ dengan $\varphi(a) = 3a, \forall a \in \mathbb{Z}_6$
   e. $\varphi: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$ dengan $\varphi(a) = a + 1, \forall a \in \mathbb{Z}_6$
   f. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $\varphi(a) = a^3, \forall a \in \mathbb{R}$
   g. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $\varphi(a) = e^a, \forall a \in \mathbb{R}$
   h. $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan $\varphi(a + bi) = a - bi, \forall a \in \mathbb{C}$
   i. $\varphi: \mathbb{Q}\sqrt{2} \to \mathbb{Q}\sqrt{2}$ dengan $\varphi\left(a + b\sqrt{2}\right) = a - b\sqrt{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$
   j. $\varphi: \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2$ dengan $\varphi(a + bi) = (a + b)_{mod\ 2}, \forall a, b \in \mathbb{Z}$
   k. $\varphi: \mathbb{Q}\sqrt{2} \to M$ dengan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$ dan $\varphi\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. Manakah diantara fungsi di atas yang merupakan isomorfisma?
3. Tentukan kernel-kernel dari fungsi di atas.
4. $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ adalah ring.

   Buktikan pemetaan $\varphi: M \to \mathbb{C}$ yang didefinisikan oleh

   $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = (a + bi), \forall\ a, b \in \mathbb{Z}$ adalah suatu homomorfisma.
5. Misal $\varphi: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{20}$ dengan $\varphi(a) = 5a, \forall a \in \mathbb{Z}_{12}$.
   a. Tentukan $Ker(\varphi)$
   b. Buktikan bahwa φ adalah homomorfisma.

DAFTAR PUSTAKA

Gallian, J.A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra, Eighth Edition.* USA: Brooks/Cole.

Isnarto. 2008. *Buku Ajar Pengantar Struktur Aljabar.* FMIPA UNNES.

Setiawan, Adi. 2014. *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup dan Teori Ring.* Salatiga: Tisara Grafika.

Subiono. 2016. *Aljabar sebagai Suatu Pondasi Matematika.* Jurusan Matematika ITS.

Suryanti, Sri. 2018. *Teori Ring.* UMG Press.

Wahyuni, S., Wijayanti, I.E., Palupi, D.J.E. 2013. *Pengantar Struktur Aljabar 2.* FMIPA UGM.