BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang menarik dan banyak dikembangkan oleh matematikawan. Berbagai macam permasalahan dapat dipecahkan dengan mengkaji dan menganalisa model ataupun rumusan dari teori graf. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Roza, Narwen, & Zulakmal). Graf merupakan pasangan suatu himpunan yang dinotasikan $G(V,E)$, dengan V himpunan simpul (titik) yang bukan himpunan kosong, dan E merupakan himpunan sisi (garis) yang menghubungkan simpul-simpul (titik), serta E boleh himpunan kosong (Munir, 2016).

Dua puluh tahun terakhir ini banyak peneliti yang menghubungkan graf dengan struktur aljabar untuk topik penelitian. Sebagian besar fokus pada topik graf pembagi nol. Diberikan R adalah suatu ring komutatif terhadap operasi perkalian, dan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol dari R. Suatu ring R memuat suatu pembagi nol jika terdapat $x, y \in R$ maka $x, y \neq 0$ sedemikian hingga $x.y = 0$. Graf pembagi nol dari ring komutatif yang dinotasikan $\Gamma(R)$ adalah suatu graf dengan simpul-simpulnya adalah semua elemen dari R dan dua simpul terhubung jika perkalian titik keduanya adalah nol. Gagasan tersebut diperkenalkan I. Beck dalam jurnalnya *"Coloring of Commutative Rings"* pada tahun 1988 (Wicaksono & Soleha, 2013).

Selanjutnya, ada Anderson dan Livingston pada tahun 1999 memperkenalkan graf pembagi nol dari gelanggang komutatif R, yang dilambangkan dengan $\Gamma(R)$ dengan elemen satuan yang simpul-simpulnya adalah pembagi nol tak nol dari R (Husna, Inayah, & Harianto, 2018). Pada tahun-tahun berikutnya banyak peniliti yang mengkaji sekaligus mengembangkan gagasan tentang garf pembagi nol. Redmond (2002) mengembangkan konsep tentang graf pembagi nol pada kasus ring non-komutatif. Lebih jauh lagi, Dozlan dan Oblak (2012) mengembangkan kajian graf pembagi nol dari semiring (Kurniawan, 2018).

Khansana (2018) telah mengkaji bentuk graf pembagi nol daro gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk *p.q* bilangan prima, dan menghasilkan teorema-torema terkait dengan pola bentuk graf dari gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Salah satu konsep yang menarik dari Ring adalah himpunan pembagi nol. Suatu Ring R dikatakan memuat pembagi nol jik terdapat $x,y \in R$ dengan $x, y \neq 0$ sedemikian sehingga $x.y = 0$. Himpunan pembagi nol dari sebuah ring dinotasikan denagn $Z(R)$ dapat dipresentasikan kedalam bentuk graf (Sugiarto, Romdhini, & Switrayni, 2018). Seperti apa yang dipaparkan, penulis juga tertarik mengaitkan topik graf pembagi nol dengan gelanggang. Fenomena gelanggang berawal dari himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian biasa. Dikatakan bahwa gelanggang adalah sebuah himpunan tak kosong R terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.) yang memenuhi sifat grup komutatif terhadap $(R, +)$, memenuhi sifat grup asosiatif terhadap $(R, .)$, dan memenuhi sifat ditributif pada $(R, +, .)$. Jika gelanggang R memuat unsur kesatuan $1 \neq 0 \in R$ dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk setiap $a \in R$ maka R disebut gelanggang dengan unsur satuan. Jika untuk setiap a dan b unsur-unsur di R berlaku $ab = ba$ maka gelanggang R disebut gelanggang komutatif (Misri M. A., 2010).

Gelanggang yang digunakan dalam penelitian ini adalah gelanggang perkalian, Shafitri (2017) juga telah mengkaji hal terkait gelanggang perkalian secara terperinci. Adapun definisi dari gelanggang perkalian yaitu gelanggang R disebut gelanggang perkalian jika setiap ideal atas R merupakan ideal perkalian.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk mengkaji terkait graf pembagi nol yang dihubungkan dengan gelanggang perkalian yang dipresentasikan dengan judul "Graf Pembagi Nol Atas Gelanggang Perkalian".

1. 2. Identifikasi Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan, permasalahan yang berhasil penulis identifikasi adalah :

1. Bagaimana bentuk graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.

2. Bagaimana jumlah sisi yang diperoleh graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.
3. Bagaimana jumlah simpul graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.
4. Bagaimana jumlah derajat semua simpul graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.

1. 3. Batasan Masalah

Berdasarkan identifikasi masalah yang sudah penulis jelaskan di atas, penelitian ini dibatasi :

1. Gelanggang yang digunakan adalah gelanggang komutatif bukan daerah integral, atau gelanggang komutatif yang memiliki unsur pembagi nol.
2. Gelanggang yang digunakan adalah gelanggang $\mathbb{Z}_n$.
3. Gelanggang $\mathbb{Z}_n$ yang digunakan yaitu untuk n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12.
4. Yang dikaji dalam graf pembagi nol atas gelanggang perkalian ini adalah bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisinya dan jumlah derajat semua simpulnya.

1. 4. Rumusan Masalah

Berdasarkan batasan masalah yang sudah penulis jelaskan di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana bentuk graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian?
2. Bagaimana jumlah sisi yang diperoleh graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian?
3. Bagaimana jumlah simpul graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian?
4. Bagaimana jumlah derajat semua simpul graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian?

1. 5. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk mengetahui bentuk graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.
2. Untuk mengetahui jumlah sisi yang diperoleh graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.
3. Untuk mengetahui jumlah simpul graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.
4. Untuk mengetahui jumlah derajat semua simpul graf pembagi nol pada kasus $\mathbb{Z}_n$ dengan n = 4, 6, 8, 9, 10, dan 12 atas gelanggang perkalian.

1. 6. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dalam penelitian ini adalah :

1. Bagi Penulis

Sebagai pembelajaran untuk mengetahui dan memahami bentuk graf pembagi nol atas gelanggang perkalian dan jumlah sisi dan simpul dari graf pembagi nol atas gelanggang perkalian serta dapat menambah wawasan ilmu pengetahuan dalam bidang teori graf.

2. Bagi Mahasiswa

Penelitian ini dapat dijadikan rujukan dan pembelajaran mengenai graf pembagi nol atas gelanggang perkalian.

3. Bagi Lembaga

Sebagai sumbangan teori dalam pengembangan kajian teori graf khususnya pada graf pembagi nol atas gelanggang perkalian.