

**KAJIAN GRAF PEMBAGI NOL  
DARI GELANGGANG  $\mathbb{Z}_{p^2}$  DENGAN  $p$  BILANGAN PRIMA**

**SKRIPSI**



**JURUSAN TADRIS MATEMATIKA  
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN  
INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI SYEKH NURJATI CIREBON  
2022 M / 1443 H**

**KAJIAN GRAF PEMBAGI NOL  
DARI GELANGGANG  $\mathbb{Z}_{p^2}$  DENGAN  $p$  BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI



KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA  
INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI SYEKH NURJATI CIREBON  
2022 M / 1443 H

## ABSTRAK

### KAJIAN GRAF PEMBAGI NOL DARI GELANGGANG $\mathbb{Z}_{p^2}$ DENGAN $p$ BILANGAN PRIMA

Penelitian ini mengkaji mengenai graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  untuk  $p$  bilangan prima. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui pola tertentu mengenai bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat simpul, dan jumlah jarak eksentris dari graf pembagi nol tersebut. Gelanggang yang dipakai dalam penelitian ini adalah gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  untuk  $p$  bilangan prima, adapun bilangan prima yang digunakan adalah 2, 3, 5, 7, dan 11. Penelitian ini menggunakan metode (*basic research*) yang dimaksudkan untuk menemukan pengetahuan baru yang belum pernah diketahui sebelumnya.  $R$  dikatakan ring komutatif (abelian) apabila berlaku  $a \cdot b = b \cdot a, \forall a$  dan  $b$  adalah unsur di  $R$ . Graf  $G$ , dinotasikan dengan  $G=(V,E)$  adalah pasangan himpunan  $(V,E)$  dengan  $V$  himpunan simpul atau titik (*vertices atau node*) dan  $E$  himpunan sisi (*arcs atau edges*).  $V$  dan  $E$  adalah himpunan berhingga. Himpunan  $V$  tidak hampa, himpunan  $E$  mungkin hampa. Graf pembagi nol dari gelanggang komutatif adalah suatu graf dengan simpul-simpulnya adalah semua elemen dari gelanggang  $R$  dan dengan dua titik yang berbeda,  $x$  dan  $y$  dikatakan terhubung jika dan hanya jika  $x \cdot y = 0$  untuk  $x, y \neq 0$ , dalam hal ini  $x \cdot y$  merupakan unsur pembagi nol. Jumlah jarak eksentrik adalah jumlah hasil kali antara total jarak dan eksentrisitas titik. Adapun hasil dari penelitian ini bahwasanya: graf pembagi nol pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  untuk  $p$  bilangan prima memiliki pola bentuk graf lengkap  $K_{(p-1)}$ , jumlah simpul sebesar  $(p-1)$ , jumlah sisi sebesar  $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ , jumlah derajat simpul sebesar  $(p-1)(p-2)$ , dan jumlah jarak eksentrik sebesar  $p^2 - 3p + 2$ . Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa jumlah derajat simpul dan jumlah jarak eksentrik pada graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  untuk  $p$  bilangan prima adalah sama.

**Kata kunci:** Graf, Gelanggang, Graf pembagi nol, Jumlah simpul, Jumlah sisi, derajat simpul, Jumlah jarak eksentrik graf

## ABSTRACT

### THE ZERO DIVISOR GRAPH OF THE RING $\mathbb{Z}_{p^2}$ FOR $p$ PRIME NUMBERS

This study examines the zero divisor graph of the ring  $\mathbb{Z}_{p^2}$  for  $p$  prime numbers. The purpose of this study is to determine a certain pattern regarding the shape of the graph, the number of vertices, the number of edges, the number of degrees of the vertices, and the number of eccentric distances from the zero divisor graph. The arena used in this study is ring  $\mathbb{Z}_{p^2}$  for  $p$  prime numbers, while the prime numbers used are 2, 3, 5, 7, and 11. This study uses a method (basic research) which is intended to find new knowledge never known before.  $R$  is said to be a commutative (abelian) ring if  $a \cdot b = b \cdot a$  applies for every  $a$  and  $b$  is an element in  $R$ . Graph  $G$ , denoted by  $G=(V,E)$  is a set pair  $(V,E)$  with  $V$  a set of vertices a point (vertices or nodes) and  $E$  the set of edges (arcs or edges).  $V$  and  $E$  are finite sets. The set  $V$  is not empty, the set  $E$  may be empty. The zero divisor graph of the commutative ring is a graph whose vertices are all elements of the ring  $R$  and with two distinct vertices,  $x$  and  $y$  are said to be connected if and only if  $x \cdot y = 0$  for  $x, y \neq 0$ , in this case  $x \cdot y$  is the zero divisor. The number of eccentric distances is the multiplication between the total distance and the eccentricity of the point. The results of this study are that the zero divisor graph of the zero divisor of the ring  $\mathbb{Z}_{p^2}$  for  $p$  prime numbers has a complete graph  $K_{(p-1)}$ , the number of vertices is  $(p - 1)$ , the number of edges is  $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ , the number of degrees of vertices is  $(p - 1)(p - 2)$ , and the eccentric distance sum is  $p^2 - 3p + 2$ . From these results it can be concluded that the number of degrees of vertices and the eccentric distance sum in the zero divisor graph of the ring  $\mathbb{Z}_{p^2}$  for  $p$  prime numbers are the same.

**Keywords:** graph, ring, zero divisor graph, number of vertices, number of edges, degrees of vertices, eccentric distance sum.

LEMBAR PERSETUJUAN

KAJIAN GRAF PEMBAGI NOL  
DARI GELANGGANG  $\mathbb{Z}_{p^2}$  DENGAN  $p$  BILANGAN PRIMA



## NOTA DINAS

Kepada:

Yth. Ketua Jurusan Tadris Matematika

IAIN Syekh Nurjati Cirebon

di

Cirebon

*Assalamu'alaikum Wr. Wb*

Setelah melakukan bimbingan, telaah, arahan dan koreksi terhadap penulisan skripsi

Nama : Nurmaya Indar Amalia

NIM : 1708105069

Judul : Kajian Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  dengan  $p$  Bilangan Prima

Kami bersepakat bahwa skripsi tersebut sudah dapat diajukan untuk dimunaqosahkan. Atas pertimbangan dan kebijakannya, kami haturkan banyak terima kasih.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb*

Cirebon, Maret 2022

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Muhamad Ali Misri, M.Si  
NIP. 19811030 201101 1 004

Hj. Indah Nursuprianah, M.Si.  
NIP. 19750402 200604 2 001

## **PERNYATAAN KEASLIAN**

Bismillahirrahmaanirrahiim

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Nurmaya Indar Amalia

NIM : 1708105069.

Fakultas / Jurusan : Ilmu Tarbiyah dan Keguruan/ Tadris Matematika

Judul : Kajian Graf Pembagi Not dari Gelanggang  $Z_{p^2}$  dengan  $p$   
Bilangan Prima

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini merupakan hasil karya penulis yang diajukan untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana (S1) di IAIN Syekh Nurjati Cirebon.
2. Semua sumber yang penulis gunakan dalam penulisan skripsi ini telah dicantumkan sesuai ketentuan atau pedoman karya tulis ilmiah.
3. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini sebagian maupun keseluruhan isinya merupakan karya plagiat, penulis bersedia menerima sanksi yang berlaku di IAIN Syekh Nurjati Cirebon.

Cirebon, 25 Maret 2022  
Pembuat Pernyataan,

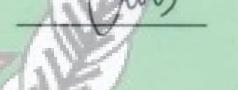
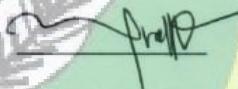
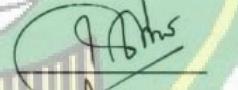


**Nurmaya Indar A**  
**NIM. 1708105069**

## LEMBAR PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “ **Kajian Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  dengan  $p$  Bilangan Prima** ” oleh Nurmaya Indar Amalia NIM. 1708105069 telah dimunaqasyahkan pada hari Rabu tanggal 23 Februari 2022 di hadapan dewan pengaji dan dinyatakan lulus.

Skripsi ini telah memenuhi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan (S. Pd) pada Jurusan Tadris Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) IAIN Syekh Nurjati Cirebon.

	Tanggal	Tanda Tangan
Ketua Jurusan <b>Dr. Muhamad Ali Misri, M. Si</b> NIP. 19811030 201101 1 004	22 - 03 - 2022	
Sekretaris Jurusan <b>Hendri Rahario, M. Kom</b> NIP. 19741212 200604 1 003	21 - 03 - 2022	
Pengaji I <b>Dr. Budi Manfaat, M.Si</b> NIP. 19811128 200801 1 008	25 - 02 - 2022	
Pengaji II <b>Hendri Handoko, M. Pd</b> NIP. 19810802 201503 1 002	07 - 03 - 2022	
Pembimbing I <b>Dr. Muhamad Ali Misri, M.Si</b> NIP. 19811030 201101 1 004	07 - 03 - 2022	
Pembimbing II <b>Hi. Indah Nursupriyah, M.Si</b> NIP. 19750402 200604 2 001	21 - 03 - 2022	

Mengetahui,  
Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan



**Dr. H. Farithin, M. Pd**  
NIP. 19610805 199003 1 004

## **RIWAYAT HIDUP**

Nama Lengkap : Nurmaya Indar Amalia  
Tempat/ Tanggal Lahir : Cirebon, 01 Maret 2000  
Jenis Kelamin : Perempuan  
Nama Bapak : Badarudin  
Nama Ibu : Hindun Riyana  
Telp./ HP : 0852-1130-0168  
e-mail : [nurmayaindaramalia@gmail.com](mailto:nurmayaindaramalia@gmail.com)



Alamat Lengkap :  
Jl. Nyi Ageng Serang, blok Kramat RT/RW 014/005  
Desa Dukupuntang, Kec. Dukupuntang Kab. Cirebon

Riwayat Pendidikan :

1. MI ITB Dukupuntang, 2011
2. MTs Al-Ishlah Bobos, 2014
3. MA Al-Ishlah Bobos, 2017

Riwayat Organisasi Kemahasiswaan :

Anggota Departemen Pengembangan Profesi Jurusan (P2J) HIMKA FITK IAIN Syekh Nurjati Cirebon periode 2019 – 2020.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur kehadirat Allah SWT penulis panjatkan karena berkat rahmat, kekuatan, kehendak, hidayah, dan pertolongan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Salawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, dan sahabat-sahabatnya yang telah memberi penerangan bagi umat islam.

Skripsi yang berjudul “**Kajian Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_{p^2}$  dengan  $p$  Bilangan Prima**” disusun untuk memenuhi syarat kelulusan serta untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan di Institut Agama Islam Negeri (IAIN) Syekh Nurjati Cirebon. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan doa berbagai pihak. Oleh karena itu, irungan do'a dan ucapan terima kasih penulis ucapkan kepada :

1. Dr. H. Sumanta, M. Ag., Rektor IAIN Syekh Nurjati Cirebon.
2. Dr. H. Farihin, M. Pd., Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan.
3. Dr. Muhamad Ali Misri, M. Si., Ketua Jurusan Tadris Matematika
4. Hendri Raharjo, M.Kom., Sekretaris Jurusan Tadris Matematika
5. Dr. Muhamad Ali Misri, M. Si., Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, petunjuk, bantuan dan kesabaran dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Hj. Indah Nursuprianah, M.Si., Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, petunjuk, bantuan dan kesabaran dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Segenap dosen dan staf IAIN Syekh Nurjati Cirebon, khususnya dosen Matematika yang telah memberikan ilmunya dengan sabar dan tanpa pamrih kepada penulis sehingga penulis mempunyai masa depan dan wawasan yang lebih dalam.
8. Kedua orangtua tercinta Bapak Badarudin dan Ibu Iin, yang hingga saat ini selalu mendukung penulis baik dalam bentuk dukungan moral, material, dan do'a. Adik-adikku tercinta Rizal Wahyu Ramadhan dan Riyanti Silvia Zahra.

9. Sahabat terbaik yang saya miliki Siti Armala, Nelly Naelatul Izza, Khofifah Indriyani, Nanda Elfararahmi, Amalia Mahmudah, Qudsiyatul Kholisoh, Dinda Miftahussa'adah, dan Lillah Nurfadlillah. Mereka tak henti-hentinya memberi semangat, do'a, dan terus memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman tersayang, khususnya kelas Sigma Satya. Semoga kebaikan selalu menyertai kalian.
11. Rasukma dan *reality club* yang menemani penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.
12. Terima kasih kepada diri sendiri yang tidak menyerah dan sudah berjuang sejauh ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran penulis harapkan dari pembaca sehingga skripsi ini menjadi lebih sempurna.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat membawa manfaat bagi pihak-pihak yang membutuhkan.

Cirebon, 26 Maret 2022  
Penulis

IAIN SYEKH NURJATI  
CIREBON

## DAFTAR ISI

	Halaman
Kata Pengantar .....	ix
Daftar Isi.....	xi
Daftar Tabel .....	xiii
Daftar Gambar.....	xiv
Daftar Lampiran .....	xv
Bab I Pendahuluan .....	1
1. 1. Latar Belakang .....	1
1. 2. Identifikasi Masalah.....	4
1. 3. Batasan Masalah.....	5
1. 4. Rumusan Masalah .....	5
1. 5. Tujuan Penelitian .....	6
1. 6. Manfaat Penelitian .....	6
1. 7. Metode Penelitian.....	7
1. 8. Sistematika Penulisan .....	9
Bab II Telaah Pustaka .....	11
2. 1. Struktur Aljabar.....	11
2.1.1. Struktur Aljabar .....	11
2.1.2. Grup .....	14
2.1.3. Gelanggang .....	19
2. 2. Graf .....	21
2.2.1. Definisi Graf .....	21
2.2.2. Jenis-jenis Graf .....	23
2.2.3. Derajat Simpul .....	24
2.2.4. Graf Terhubung.....	25
2.2.5. Jarak pada Graf Terhubung.....	25
2.2.6. Graf Sederhana Khusus.....	25
2. 3. Graf Pembagi Nol .....	28

2. 4. Jumlah Jarak Eksentrik .....	29
Bab III Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ .....	31
3. 1. Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima dengan Operasi Penjumlahan dan Perkalian .....	31
3. 2. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima .....	33
3.2.1. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{2^2}$ .....	34
3.2.2. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{3^2}$ .....	34
3.2.3. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{5^2}$ .....	35
3.2.4. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{7^2}$ .....	36
3.2.5. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{11^2}$ .....	37
3. 3. Jumlah Simpul Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima .....	39
3. 4. Jumlah Sisi Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima .....	40
3. 5. Jumlah Derajat Simpul Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima .....	41
Bab IV Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ .....	43
4. 1. Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{2^2}$ .....	43
4. 2. Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{3^2}$ .....	43
4. 3. Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{5^2}$ .....	44
4. 4. Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{7^2}$ .....	47
4. 5. Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{11^2}$ .....	49
Bab V Penutup .....	57
5. 1. Kesimpulan .....	57
5. 2. Saran .....	57
Daftar Pustaka .....	58
Lampiran-lampiran .....	61

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel II.1	Tabel <i>cayley</i> dari $\mathbb{Z}_6$ pada Operasi $\times$ ..... 21
Tabel III.1	Tabel Bentuk Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ ..... 39
Tabel III.2	Jumlah Simpul ..... 40
Tabel III.3	Jumlah Sisi ..... 41
Tabel III.4	Jumlah Derajat Simpul ..... 42
Tabel IV.1	Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p$ Bilangan Prima ..... 54



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar I.1	Jembatan Konigsberg yang direpresentasikan dalam graf .....1
Gambar I.2	Bagan Kerangka Berpikir.....8
Gambar II.1	Graf Sederhana.....22
Gambar II.2	Graf Tak Sederhana.....23
Gambar II.3	Graf Berarah dan Graf Berarah Ganda.....23
Gambar II.4	Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung .....25
Gambar II.5	Graf Lengkap .....26
Gambar II.6	Graf Lingkaran.....26
Gambar II.7	Graf Teratur.....27
Gambar II.8	Graf Bipartit Lengkap .....27
Gambar II.9	Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_8$ .....28
Gambar II.10	Graf G Lengkap $K_3$ .....29
Gambar III.1	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_9$ .....35
Gambar III.2	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{25}$ .....36
Gambar III.3	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{49}$ .....37
Gambar III.4	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{121}$ .....38
Gambar IV.1	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_9$ .....43
Gambar IV.2	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{25}$ .....45
Gambar IV.3	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{49}$ .....47
Gambar IV.4	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{121}$ .....49

## **DAFTAR LAMPIRAN**

Lampiran 1	SK Pembimbing .....	61
Lampiran 2	Tabel Cayley dalam Maple .....	65

