BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang menjadi dasar ilmu pengetahuan lainnya. Dalam perkembangannya, matematika menjadi salah satu objek yang diteliti oleh para ilmuan seiring dengan perkembangan teknologi. Berbagai cabang matematika yang menjadi objek untuk diteliti oleh para ilmuan, salah satunya adalah teori graf.

Teori graf merupakan disiplin ilmu yang berkembang pesat lebih dari 25 tahun yang lalu. Ilmu ini muncul pertama kali pada 1736 ketika Euleur mencoba menyelesaikan permasalahan mengenai Jembatan Konigsberg, jembatan yang terletak di kota tua wilayah Prusia Timur, saat ini dikenal sebagai Kaliningrad. Untuk memungkinkan penduduk Konigsberg melakukan perjalanan dari satu kota ke kota lainnya, dibangun tujuh jembatan yang terbentang di atas sungai Pregel. Orang-orang berusaha membuat rute sekitar kota, yang dapat digunakan mereka menyebrangi ketujuh jembatan itu sekali saja. Hingga sampai pada kesimpulan bahwa usaha itu tergolong mustahil, karena mereka tak pernah membuahkan hasil. Leonhard Euler menulis artikel mengenai masalah ini dan metode yang umum untuk masalah-masalah lain. (Kusuma, 2020)

IAIN SYEKH NURJATI
CIREBON

Gambar I.1 Jembatan Konigsberg yang direpresentasikan dalam graf

Marsudi (2015) mendefinisikan graf *G=(V,E)* yaitu pasangan himpunan simpul (titik atau *vertices*) *V* dan himpunan sisi *(edges) E*, setiap sisi di *V* menghubungkan dua titik dari *V*. Simpul tidak boleh kosong, tetapi sisi boleh kosong. Artinya, sebuah graf mungkin tidak memiliki sisi namun selalu memiliki simpul minimal satu. Graf yang hanya memiliki satu simpul dan tidak memiliki sisi dinamakan graf trivial.

Graf ini sering dijadikan alat untuk memodelkan permasalahan dan menyelesaikan permasalasahan yang ada. Pengaplikasan graf di berbagai bidang yang ada saat ini merupakan hasil penelitian yang dikaji ilmuan sebelumnya, penelitian mengenai teori graf sampai saat ini masih terus dikaji untuk inovasi kedepannya.

Menurut Wahyuningrum & Usada (2019) banyak pengaplikasian graf di kehidupan sehari-hari seperti pada bidang komunikasi, transportasi, pewarnaan peta, ikatan kimia, desain arsitektur dan lain sebagainya. Selain itu, teori graf juga sering menjadi objek kajian oleh para peneliti untuk dikaitkan dengan bidang lain atau disiplin ilmu lain, salah satunya adalah matematika. Graf sering dikaji bersamaan dengan materi matematika lainnya seperti kajian graf pada gelanggang.

Menurut Misri (2010) gelanggang *R* didefinisikan sebagai himpunan tak kosong terhadap operasi jumlah (+) dan kali (×) yang memenuhi sifat grup komutatif terhadap penjumlahan (*R*,+), asosiatif terhadap perkalian (*R*, ×), dan bersifat distributif terhadap keduanya (*R*,+, ×). *R* disebut dengan gelanggang unsur satuan apabila *R* adalah gelanggang yang memiliki unsur kesatuan $1 \neq 0 \in R$ dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk setiap $a \in R$. Gelanggang *R* disebut komutatif jika untuk setiap *a* dan *b* unsur-unsur di *R* berlaku $ab = ba$ atau bersifat komutatif terhadap perkalian. Contoh dari gelanggang komutatif adalah daerah integral.

Jika *R* merupakan suatu gelanggang komutatif, maka gelanggang *R* dikatakan daerah integral apabila tidak memuat pembagi nol, akan berlaku $a = 0$ dan $b = 0$, $ab = 0$ untuk setiap $a, b \in R$. Gelanggang bilangan bulat modulo 5 merupakan daerah integral, karena merupakan gelanggang komutatif yang tidak memuat pembagi nol, sedangkan gelanggang bilangan bulat modulo 6 bukan

merupakan daerah integral karena merupakan gelanggang komutatif yang memuat pembagi nol.

Pada penelitian ini, akan digunakan gelanggang komutatif yang memuat pembagi nol, atau gelanggang yang bukan merupakan daerah integral. Gelanggang yang digunakan adalah gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$, yakni gelanggang himpunan bilangan modulo p^2 dengan p didefinisikan sebagai bilangan prima..

Graf pembagi nol dari gelanggang komutatif pertama kali diperkenalkan oleh Beck (1988) dalam jurnal *"Coloring of Commutative Ring"*. Dalam jurnal tersebut dikatakan bahwa graf pembagi nol dari gelanggang komutatif adalah suatu graf yang simpul-simpulnya merupakan elemen dari gelanggang R yang apabila perkalian dua titik simpul menghasilkan nol, dua titik tersebut akan terhubung. Graf pembagi nol dari gelanggang komutatif ini disimbolkan dengan $\Gamma(R)$.

Anderson dan Naseer (1993) dalam jurnalnya yang berjudul *"Beck's Coloring of a Commutative Rings"* mendefinisikan graf pembagi nol sebagai simpul dari graf pembagi nol-nya adalah semua elemen dari ring R dan dua simpul yang berbeda, misal x dan y terhubung oleh suatu sisi atau bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ untuk $x,y \neq 0$, dalam hal ini $x \cdot y$ merupakan unsur pembagi nol. Kemudian dilanjutkan oleh Anderson dan Lingston (1999) membahas mengenai graf pembagi nol dari gelanggang komutatif. Selanjutnya, Wicaksono dan Sholeha pada tahun (2013) telah mengkaji penelitian tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari ring komutatif dengan elemen satuan. Kemudian, Suthar (2017) mengkaji penelitian tentang "*Energi and Wiener Index of Total Graph Over Ring* Z_n*"* menghasilkan beberapa teorema terkait energi dan indeks graf total dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$.

Graf memiliki jenis dan bentuk yang bermacam-macam. Jumlah simpul dan sisi yang dimiliki graf akan mempengaruhi bentuk dari graf tersebut. Jumlah simpul disebut sebagai kardinilitas graf, dan dinyatakan dengan *n(V)*, dan jumlah sisi dinyatakan dengan *n(E)*. Jumlah sisi yang bersisian dengan simpul pada graf tak berarah disebut derajat, dan dinotasikan dengan *d(v)*, sedangkan jumlah derajat semua simpul pada suatu graf dinotasikan dengan $\sum_{v \in V} d(v)$. (Wilson, 2010)

Menurut Bielak & Browniszewsaka (2017) jumlah jarak eksentrik adalah jumlah perkalian antara total jarak dan eksentrisitas titik atau simpul. Misalkan *u* dan *v* merupakan titik di *G* dan *G* adalah graf terhubung. Jarak dari *u* ke *v* adalah panjang lintasan *u – v* di *G* yang disimbolkan dengan *d(u,v).* Sedangkan eksentrisitas (eccentricity) titik *u* di *G* adalah jarak terbesar dari *u* ke semua titik di *G* yang dinotasikan dengan *e(u).*

Selanjutnya, Khasana (2018) mengkaji tentang graf pembagi nol dari gelanggang Z_p x Z_q, dan menghaislkan beberapa teorema terkait bentuk graf pembagi nol nya dan jumlah eksentrik dari graf yang terbentuk.

Noviana (2020) dalam skripsinya mengkaji tentang graf non-sentralisator dari grup dihedral dan menghasilkan beberapa teorema terkait jumlah jarak ekstrinsik dan indeks jumlah jarak ekstrinsik dari graf yang dibentuk.

Berdasarkan hasil penelitian-penelitian tersebut, penulis ingin mengkaji graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan *p* bilangan prima. Permasalahan yang muncul dalam pembahasan mengenai bentuk graf adalah menentukan pola umum dari bentuk graf tersebut, sekaligus menentukan pola umum dari jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat semua simpul, dan jumlah jarak eksentris dari graf yang terbentuk tersebut. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tentang pola umum dari graf pembagi nol yang direpresentasikan dalam judul "Kajian Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan *p* Bilangan Prima".

1. 2. Identifikasi Masalah

Adapun permasalahan yang teridentifikasi berlandaskan latar belakang di atas yaitu :

1. Pola umum bentuk pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk *p* bilangan prima belum diketahui.
2. Pola umum jumlah simpul pada graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk *p* bilangan prima belum diketahui.
3. Pola umum jumlah sisi pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk *p* bilangan prima belum diketahui.

4. Pola umum jumlah derajat simpul pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima belum diketahui.
5. Pola umum jumlah jarak eksentrik pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima belum diketahui.

1. 3. Batasan Masalah

Pembatasan masalah digunakan penulis untuk membatasi masalah dan memfokuskan penelitian. Dalam penelitian ini, peneliti mambatasi masalah hanya pada:

1. Gelanggang yang digunakan adalah gelanggang komutatif bukan daerah integral atau gelanggang komutatif yang memiliki unsur pembagi nol.
2. Gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima, *p=2, 3, 5, 7, dan 11*.
3. Kajian graf pembagi nol yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat simpul, dan jumlah jarak eksentrik.

1. 4. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, identifikasi masalah, dan pembatasan masalah di atas, penulis menemukan permasalahan yang dirumuskan sebagai berilut:

1. Bagaimana pola umum bentuk pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima?
2. Bagaimana pola umum jumlah simpul, jumlah sisi, dan jumlah derajat simpul pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima?
3. Bagaimana pola umum jumlah jarak eksentrik pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima?

IAIN SYEKH NURJATI CIREBON

1. 5. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui pola umum bentuk pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima.
2. Untuk mengetahui pola umum jumlah simpul, jumlah simpul, dan jumlah derajat simpul pada graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima.
3. Untuk mengetahui pola umum jumlah jarak eksentrik pada graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima.

1. 6. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

   Sebagai pembelajaran dalam memahami dan menentukan pola umum umum bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat semua simpul, dan jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari suatu gelanggang, yang dapat menambah pengetahuan dan wawasan keilmuan pada bidang teori graf.
2. Bagi Mahasiswa

   Sebagai bahan rujukan mengenai materi pola umum bentuk graf, jumlah, simpul, jumlah sisi, jumlah derajat semua simpul, dan jumlah jarak ekstrinsik pada graf pembagi nol gelanggang.
3. Bagi Lembaga

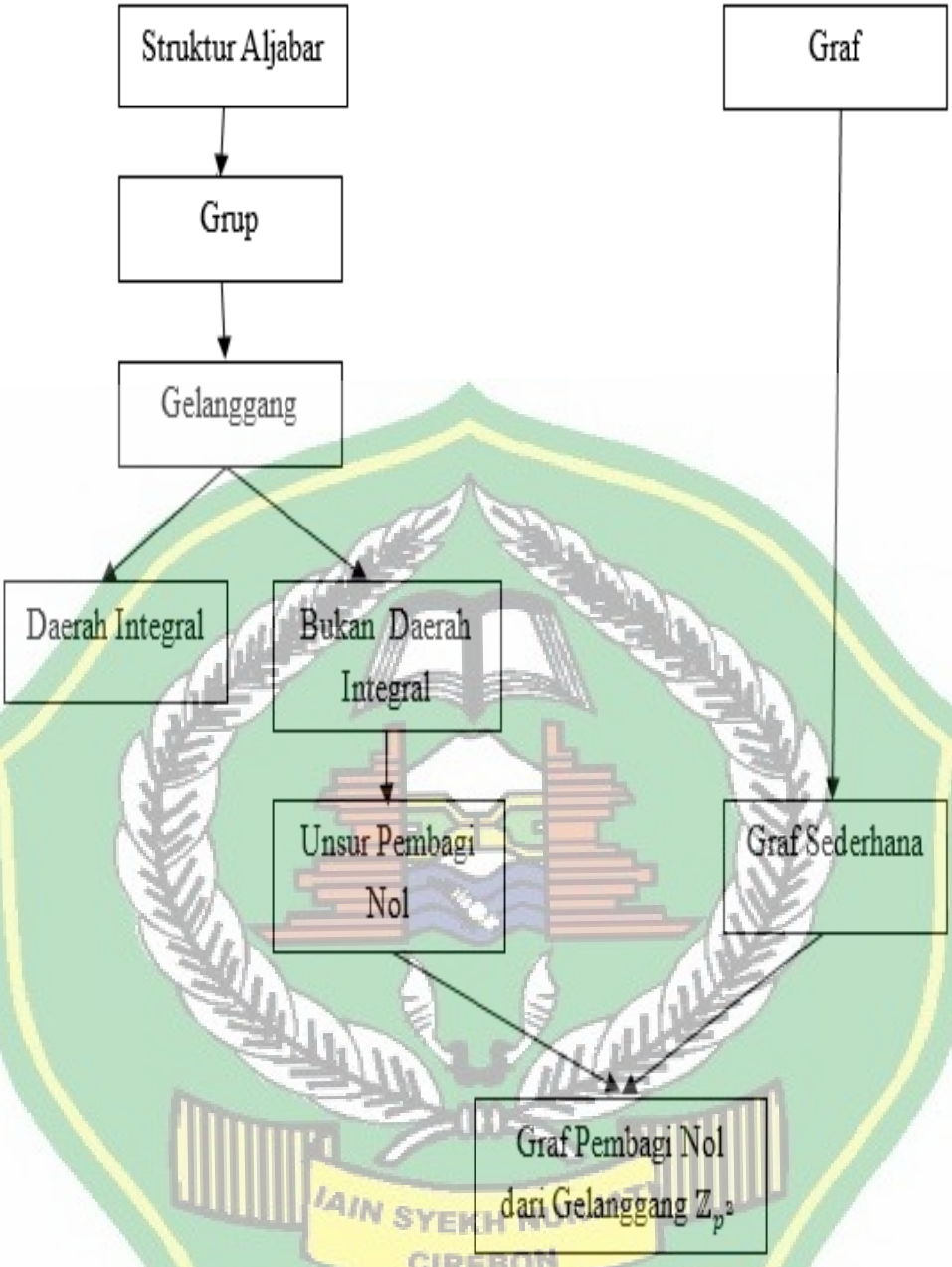
   Sebagai inventaris teori dalam pengembangan kajian teori graf khususnya pada kajian teori pola umum bentukgraf, jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat simpul, dan jumlah jarak eksentrik pada graf pembagi nol dari suatu gelanggang.

1. 7. Metode Penelitian

Menurut Darmalaksana (2020) metode penelitian adalah skenario pelaksanaan penelitian yang akan dijalankan. Berdasarkan tujuan, metode penelitian diklasifikasikan menjadi penelitian dasar *(basic research)*, penelitian pengembangan *(R & D)*, dan penelitian terapan.

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian dasar *(basic research)*. Pada umumnya, penelitian dasar (murni) bertujuan untuk mengembangkan teori dan tidak memperhatikan kegunaannya secara langsung yang bersifat praktis. Jadi, penelitian dasar / murni (*basic research)* berkenaan dengan penemuan dan pengembangan ilmu. Setelah ilmu tersebut digunakan untuk memecahkan masalah, penelitian tersebut akan menjadi penelitian terapan. (Sugiono, 2019)

Adapun kerangka berpikir dalam penelitian ini tersaji dalam bagan di bawah ini :



Gambar I.2 Bagan Kerangka Berpikir

Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan penulis dalam mengkaji penelitian ini adalah:

1. Menunjukkan himpunan $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah suatu gelanggang pada operasi jumlah $(+)$ dan kali $(\times)$.

2. Menunjukkan unsur pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk p bilangan prima berdasarkan definisi unsur pembagi nol dari suatu gelanggang.
3. Merepresentasikan graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ dalam bentuk gambar.
4. Menentukan bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat semua simpul, dan jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$.
5. Mencari pola tertentu dari beberapa contoh tersebut yang kemudian akan dijadikan sebagai teorema melalui pembuktian melalui pendekatan induktif.

Pendekatan induktif yang dimakasud adalah pendekatan yang diawali dengan penyajian keadaan-keadaan khusus kemudian ditarik kesimpulan secara umum. (Winarso, 2014).

Pendekatan induktif dilakukan dengan mengorganisasikan fakta-fakta atau hasil-hasil pengamatan yang terpisah menjadi rangkaian hubungan atau suatu generalisasi. (Azwar, 2017)

1. 8. Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini dibagi dalam 5 bab yang di dalamnya memiliki subbab-subbab. Secara garis besar, sistematika penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I menggambarkan isi penelitian secara umum, agar pembaca dapat mengetahui apa yang akan dibahas dalam bab pembahasan. Bab ini memiliki beberapa subbab bahasan, yaitu: latar belakang, identifikasi masalah,batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II berisi tentang teori-teori yang dipakai sebagai konsep-konsep materi yang menjadi rujukan untuk mendukung pada bab pembahasan. Adapun materi yang dibahas meliputi: struktur aljabar, grup, gelanggang, dan graf .

Bab III berisi mengenai pembahasan ini membahas mengenai graf pembagi nol. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan operasi jumlah dan kali merupakan suatu gelanggang.

Selanjutnya akan ditunjukkan unsur pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ dan menggambar bentuk graf pembagi nolnya. Kemudian dari gambar graf yang didapatkan akan dicari pola terkait dengan jumlah simpul, jumlah sisi, jumlah derajat semua simpul.

Bab IV berisi pembahasan mengenai jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$. Pertama- tama disajikan perhitungan jumlah jarak ke semua titik yang ada di graf pembagi nol, selanjutnya dicari eksentrisitas masing-masing titik, kemudian dihitung jumlah jarak ekstrinsiknya.

Bab V berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan, dan disertai dengan saran terkait hasil penelitian.

IAIN SYEKH NURJATI
CIREBON