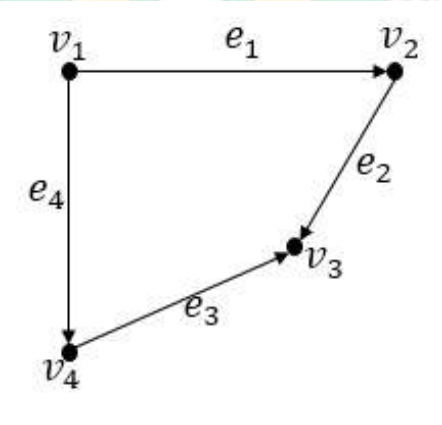
BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang Masalah

Himpunan pasangan terurut yang dibangun oleh himpunan titik dan himpunan garis serta dilengkapi dua pemetaan disebut sebagai graf berarah atau quiver. Dua pemetaan yang dimaksud dalam graf yaitu pemetaan dari himpunan garis (edges) ke himpunan titik (vertex), dengan pemetaan pertama disebut sebagai sumber/asal (source) dan pemetaan yang kedua disebut sebagai ujung/target (range). Graf G = (E, V, s, r) adalah graf dengan himpunan titik yang dinotasikan dengan V dan himpunan garis yang dinotasikan dengan E serta dilengkapi dua pemetaan yaitu pemetaan s dan pemetaan r. Titik-titik pada suatu graf dinotasikan oleh v_n sedangkan garis-garisnya dinotasikan oleh e_n, dengan n = bilangan asli. Graf disebut juga sebagai objek kombinatorial yang terdiri dari garis-garis (edges) dan titik-titik (vertex) serta pemetaan.



Gambar I.1.
Contoh Graf

Pada Gambar I.1 himpunan titik V = { v_1, v_2, v_3, v_4}, dan himpunan garis E = {e_1, e_2, e_3, e_4}, serta pemetaan sumber pada setiap garis dalam graf tersebut yaitu s(e_1) = v_1, s(e_2) = v_2, s(e_3) = v_4, s(e_4) = v_1 dan pemetaan r pada setiap garisnya yaitu r(e_1) = v_2, r(e_2) = v_3, r(e_3) = v_3, r(e_4) = v_4.

Barisan semua sisi dari titik v_1 ke v_n atau ditulis dengan $\mu = (v_1|e_1, e_2, \dots, e_n|v_n)$ sehingga $s(\mu) = v_1$ dan $r(\mu) = v_n$ dengan $e_1, \dots e_n \in E, v_1, \dots v_n \in V$ dan $n =$ bilangan asli disebut dengan lintasan yang bersumber di v_1 dan berujung di v_n. Lintasan tersebut memiliki panjang sejauh n atau ditulis dengan $l(\mu) = n$. Suatu titik v_1 merupakan lintasan dengan panjang 0 atau disebut juga dengan lintasan trivial.

Himpunan semua lintasan pada graf berarah dapat direpresentasikan dengan matriks ajasensi. Matriks ajasensi sebuah lintasan pada graf berarah dengan n buah titik adalah sebuah matriks persegi $M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$ yang memiliki ordo berjumlah $n \times n$, dengan aturan $m_{ij} = 1$ jika ada lintasan yang menghubungkan kedua titik i dan j atau titik i dan j sama $(i = j)$ dan $m_{ij} = 0$ jika tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua titik i dan j atau titik i dan j tidak sama $(i \neq j)$.

Suatu matriks $M_{n\times n}$ yang berukuran $n \times n$ atas lapangan K, yaitu: $M_{n\times n}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} ; aij \in K, untuk\ 1 \leq i, j \leq n \right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa antar matriks serta perkalian skalar antar matriks dengan lapangan K merupakan aljabar atas lapangan K atau K-Aljabar. Aljabar A atas lapangan K atau K-Aljabar merupakan sebuah gelanggang A dengan unsur identitas sedemikian sehingga sebagai K-ruang vektor A memenuhi $\kappa\ (pq) = (p\kappa)\ q = p\ (\kappa q)$, untuk setiap $\kappa \in K = dan\ p, q \in A$.

Dengan begitu, untuk sebarang lapangan K dan graf G yang dilengkapi dengan tiga operasi yaitu operasi penjumlahan, perkalian, dan perkalian skalar dapat didefinisikan suatu K-Aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan (path algebra) atas lapangan K pada G yang dilengkapi himpunan semua lintasan yang ada pada graf tersebut atau dinotasikan $KG = \{A \in M_{n\times n}(K) | A_{ij} = 0$, jika tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua titik i dan j atau kedua titik i dan j tidak sama $(i \neq j)\}$.

Aljabar lintasan pada graf G, belumlah dapat mewakili definisi dari aljabar lintasan Leavitt. Untuk mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt membutuhkan graf G yang diperluas atau perluasan graf (extended graph). Perluasan graf dilakukan dengan cara menambahkan sisi hantu yang memiliki arah berlawanan dengan sisi nyata pada graf. Aljabar lintasan Leavitt merupakan aljabar lintasan atas lapangan K yang memenuhi aturan (CK1): $e^*e = \delta_{e*e}r(e)$ untuk setiap $e \in E$ dan $e^* \in E^*$ dan (CK2): $v = \sum_{\{e\in E|s(e)=v\}} ee^*$ untuk setiap simpul beraturan $v \in V$ atau disebut syarat Cuntz-Krieger. Akan tetapi, (Astriawati, 2015) telah menjelaskan bahwa aljabar lintasan merupakan sub-aljabar dari aljabar lintasan Leavitt.

Tujuan dari tulisan ini adalah mengisi secara lengkap pembahasan mengenai perbedaan dan persamaan antara aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt, serta contoh graf yang merupakan aljabar lintasan leavitt tetapi bukan aljabar lintasan.

1. 2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian tersebut, peneliti merumuskan masalah penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan antara aljabar lintasan dengan aljabar lintasan leavitt?
2. Bagaimana perbedaan antara aljabar lintasan dengan aljabar lintasan leavitt?
3. Bagaimana contoh graf yang merupakan aljabar lintasan leavitt tetapi bukan aljabar lintasan?

1. 3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka dapat dirumuskan tujuan penelitian yang ingin dicapai dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui persamaan antara aljabar lintasan dengan aljabar lintasan leavitt.
2. Mengetahui perbedaan antara aljabar lintasan dengan aljabar lintasan leavitt.
3. Mengetahui contoh graf yang merupakan aljabar lintasan leavitt tetapi bukan aljabar lintasan.

1. 4. Manfaat Penelitian

1.4.1. Manfaat Teoritis

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memeberikan wawasan baru dan dapat memperkaya wawasan ilmiah. Penelitian ini juga diharapkan dapat menjadi konstruktor terhadap hasil penelitian yang telah dilakukan sebelumnya dan menjadi bahan kajian lebih lanjut bagi penelitian sejenisnya.

1.4.2. Manfaat Praktis

Pertama, manfaat bagi mahasiswa sebagai salah satu panduan yang dapat digunakan untuk menambah wawasan mengenai perbedaan dan persamaan antara aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt, serta contoh graf yang merupakan aljabar lintasan leavitt tetapi bukan aljabar lintasan.

Kedua, manfaat bagi penulis yaitu untuk meningkatkan kemampuan analisis dan berpikir kritis serta memperluas wawasan mengenai perbedaan dan persamaan antara aljabar

lintasan dan aljabar lintasan Leavitt, serta contoh graf yang merupakan aljabar lintasan leavitt tetapi bukan aljabar lintasan.

1. 5. Metode Penelitian

Dalam melakukan penelitian ini, peneliti menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif. Pendekatan deskriptif kualitatif adalah suatu metode pengolahan data dengan cara menganalisis dan menggambarkan semua kondisi atau situasi dari informasi yang dikumpulkan berupa hasil pengamatan, wawancara atau berbagai sumber lain seperti buku-buku yang telah di lakukan oleh peneliti. Lebih singkatnya, pendekatan deskriptif kualitatif itu datanya berupa naratif yang didapat dari hasil wawancara, pengamatan atau berbagai sumber lain seperti buku-buku.

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian studi pustaka karena memanfaatkan berbagai sumber bacaan seperti buku, jurnal, dan hasil penelitian-penelitian terdahulu. Jenis penelitian studi literatur adalah suatu penelitian yang dilakukan berdasarkan data-data yang diperoleh dari berbagai karya tertulis seperti hasil-hasil penelitian.

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian studi pustaka, oleh karena itu teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan cara pengumpulan data literer yaitu pengumpulan informasi yang koheren dengan objek-objek pembahasan dari berbagai sumber seperti buku, jurnal dan hasil penelitian-penelitian terdahulu. Setelah data-data atau informasi-informasi mengenai objek pembahasan terkumpul secara lengkap maka langkah selanjutnya yaitu memvalidasinya menggunakan teknik pembuktian langsung.

Untuk dapat menjawab permasalahan dalam penelitian ini, penulis membuat langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mencari, mengumpulkan, dan menganalisi dari berbagai sumber bacaan seperti buku, jurnal, dan karya ilmiah lainnya yang berkaiatan dengan permasalahan.
2. Mencari, menganlisis dan membuktikan teorema yang berkaitan dengan karakteristik dari aljabar lintasan Leavitt.
3. Menganalisis mengenai sifat dari aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt untuk membandingkan persamaan antara keduanya.
4. Menganalisis mengenai aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt untuk membandingkan perbedaan antara keduanya.

5. Mengkontruksi contoh graf yang merupakan aljabar lintasan Leavitt tetapi bukan merupakan aljabar lintasan.
6. Membuat kesimpulan.

1. 6. Sistematika Penulisan

Penelitian ini secara keseluruhan terdiri atas lima bab pembahasan, diantaranya yaitu bab I pendahuluan terkait kajian aljabar lintasan Leavitt, bab II kajian teori terkait himpunan, graf, grup, gelanggang, dan lapangan, bab III kajian teori terkait graf, k-aljabar, dan aljabar lintasan, bab IV kajian terkait aljabar lintasan Leavitt dan pembahasan dari masalah penelitian dan bab V adalah penutup.

Bab I pendahuluan. Pada bab I pendahuluan penulis menguraikan latar belakang dalam pengambilan topik permasalahan yang hendak diteliti. Kemudian, memaparkan rumusan masalah, tujuan penelitian dan metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, serta menguraikan sistematika penulisan dalam penelitian ini agar penulisannya tersusun secara sistematis.

Bab II membahas kajian teori terkait konsep-konsep dasar dalam pembahasan penelitian ini. Konsep-konsep tersebut meliputi definisi himpunan dan jenis-jenisnya, definisi grup dan jenis-jenisnya, definisi gelanggang dan klasifikasi gelanggang, definisi dan contoh dari daerah integral, serta definisi dan contoh dari lapangan, serta ruang vektor dan modul.

Bab III membahas konsep-konsep yang digunakan untuk membuktikan teorema karakteristik atau sifat aljabar Lintasan Leavitt. Konsep-konsep tersebut meliputi definisi graf, jenis-jenis dan contoh graf, k-aljabar, dan aljabar lintasan.

Bab IV membahas terkait jawaban dari rumusan masalah penelitian yang telah dibuat yaitu persamaan dari aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt, perbedaan dari aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt, dan contoh graf yang merupakan aljabar lintasan Leavitt tetapi bukan merupakan aljabar lintasan.

Bab V membahas kesimpulan dari seluruh pembahasan yang telah penulis lakukan terkait jawaban dari rumusan masalah penelitian yan telah dibuat agar pembaca bisa lebih memahami inti dari penelitian ini. Selain itu, dalam bab ini juga penulis menuliskan beberapa saran terkait dengan penelitian ini.