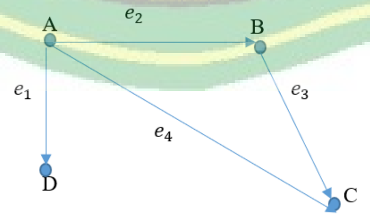
BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang Masalah

Leonard Euler pada tahun 1736 adalah salah satu ahli matematika asal Swiss yang memperkenalkan teori graf untuk pertama kalinya. Teori graf semakin berkembang dibidang pendidikan karena keunikannya dan banyak sekali penerapannya dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang keilmuan. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). (Kasmawati, 2008)

Himpunan pasangan terurut yang dibangun oleh himpunan titik dan himpunan garis (V,E) dimana V adalah himpunan *Vertex*/Titik dan E adalah himpunan *Edge*/Garis yang disertai dengan dua buah pemetaan, yaitu pemetaan yang berasal dari himpunan garis ke himpunan titik $E^1 \rightarrow E^0$ yang masing-masing daerah hasilnya disebut sebagai sumber *(source)* dan tujuan atau ujung (*range*) disebut Graf.



Gambar I.1 Contoh Graf

Dari gambar I.1 contoh graf diatas diketahui bahwa graf terdiri dari himpunan titik titik $(E = A, B, C, D)$ dan himpunan garis $(V = e_1, e_2, e_3, e_4)$ dan disertai dengan pangkal/awal *(source)* dan ujung atau *(range)***,** dimana hasil dari pemetaannya adalah $r\ (e_1) = D$ dan $s\ (e_1) = A$ dan seterusnya. Terdapat berbagai macam graf. Diantaranya, *trivialgraph, multygraph* atau *pseudograph* dan masih banyak lagi. Graf yang terdiri dari himpunan pasangan berurut adalah graf berarah (quiver). Quiver disini adalah quiver tanpa pembatasan banyaknya panah antara dua titik, dan tanpa pembatasan akan adanya *loop* atau *cycle* berarah. (Wibisono, 2006)

Selanjutnya, Himpunan semua lintasan dalam graf yang dilengkapi dengan operasi perkalian sebagai operasi komposisinya mempunyai struktur semigrup. Sehingga, himpunan lintasan yang dilengkapi oleh dua operasi yaitu operasi perkalian dan penjumlahan merupakan sebuah gelanggang. Oleh karenanya, untuk sembarang graf Q dan lapangan K bisa didefinisikan sebuah K-Aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan atas lapangan K pada quiver Q (aljabar lintasan KQ) yang memiliki basis berupa himpunan semua lintasan yang terdapat pada graf tersebut. Maka dengan kata lain aljabar lintasan (***path algebra***) merupakan aljabar atas lapangan dengan basis himpunan seluruh lintasan yang ada pada graf atau merupakan gabungan antara graf dan aljabar. Dengan demikian graf dipandang sebagai aljabar bukan sebagai objek kombinatorial. (Astriawati, 2015)

Selanjutnya, graf dapat diperluas sehingga terbentuk graf baru yang disebut dengan graf perluasan (***extended graf***). Graf ini terbentuk dengan cara menambahkan garis yang berlawanan arah dengan garis nyata (***real edges***) pada graf. Dengan begitu setiap garis nyata dalam graf akan berpasangan dengan garis baru yang dibentuk, yang disebut sebagai garis hantu (***ghost edge***). Graf peluasan ini disebut aljabar lintasan leavitt apabila memenuhi relasi Cruntz-Krieger. Perluasan ini dilakukan oleh leavitt sebagai bentuk perumuman aljabar lintasan dimana aljabar lintasan merupakan sub-aljabar dari aljabar lintasan Leavitt yang elemennya dibangun dari himpunan lintasan yang hanya memuat garis nyata.

Aljabar atas lapangan merupakan ruang vektor, sehingga aljabar atas lapangan pasti memiliki basis. sebarang subruang vektor pasti memiliki basis, demikian pula ideal dari aljabar atas lapangan juga mempunyai basis. Analogi perumuman ruang vektor ke modul, aljabar atas lapangan dapat diperumum atas gelanggang komutatif dengan elemen satuan. Salah satu akibat perumuman ini adalah bahwa aljabar atas gelanggang komutatif dengan elemen satuan memiliki ideal dasar. Aljabar yang mempunyai basis disebut aljabar bebas, aljabar lintasan leavitt atas gelanggang komutatif R dengan elemen satuan selalu merupakan $R-aljabar$ bebas. Aljabar ini merupakan perumuman dari aljabar lintasan leavitt atas lapangan. Penelitian ini akan berfokus pada ideal dasar dalam $R-aljabar$ lintasan leavitt. Kemudian, definisi ideal dasar dalam $R-$aljabar bebas atas gelanggang komutatif dengan elemen satuan akan diperumum menjadi ideal dasar prima, sehingga dapat diimplementasikan dalam aljabar lintasan atas R.

Jika A adalah aljabar atas lapangan F, maka sebarang ideal I di A berlaku $kx \in I \Longrightarrow x \in I$ untuk setiap $k \in F\backslash\{0\}$ dan setiap $x \in X$ dengan X sebarang basis dari A. Hal ini, dikarenakan setiap elemen tak nol di lapangan F selalu mempunyai invers. Tetapi, sifat tersebut belum tentu berlaku untuk suatu ideal di $R-aljabar$ bebas atas gelanggang komutatif dengan elemen satuan. (Wardati, 2018)

Selanjutnya, ideal I dalam $R-$aljabar bebas atas gelangang komutatif unital disebut ideal dasar, jika berlaku $rx \in I \Rightarrow x \in I$ untuk setiap $r \in R\backslash\{0\}$ dan setiap $x \in X$ dengan X sebarang basis dari $R-$aljabar bebas A. Kemudian ideal dasar ini yang akan menjadi acuan untuk penelitian ini. Ideal dasar ini akan dibuktikan menjadi ideal dasar prima yang mengarah kepada penelitian ini yaitu “Kajian Keprimaan Aljabar Lintasan Leavitt” karena penelitian ini masih sangat sedikit dan banyak dari peneliti yang langsung mengarah kepada sifat kesemiprimaannya sehinga sifat prima hanya sebagai pendukung. Oleh karenanya, peneliti bertujuan untuk meneliti syarat perlu dan cukup aljabar lintasan Leavitt dipandang dari dua sisi yaitu dari sifat primanya yang berupa ideal mendasar prima dan dilihat dari submodulnya sehingga dapat membangun aljabar lintasan Leavitt yang bersifat prima beserta karakteristiknya.

1. 2. Rumusan Masalah

1. Bagaimana syarat cukup dan perlu sifat prima pada aljabar lintasan leavit?

2. Bagaimana syarat cukup dan perlu modul dan submodul atas aljabar leavitt bersifat prima?
3. Bagaimana karakteristik sifat prima pada aljabar lintasan leavitt?

1. 3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk mengetahui syarat cukup dan perlu sifat prima pada aljabar lintasan leavitt.
2. Mengetahui syarat cukup dan perlu modul dan sub modul atas aljabar lintasan leavitt yang bersifat prima.
3. Mengetahui karakteristik sifat prima yang ada pada aljabar lintasan leavitt.

1. 4. Manfaat Penelitian

Penulis mengharapkan penelitian ini dapat memberikan wawasan baru, pemahaman ilmiah dan pelengkap untuk penelitian terdahulu. Terutama untuk penulis, mahasiswa, dosen/guru, kampus dan kalangan akademis. Adapun manfaat yang dapat diperoleh adalah:

i. Penulis

   Dapat meningkatkan kemampuan analisis dan berpikir krisis dalam menguraikan Aljabar Lintasan Leavitt Prima.

ii. Mahasiswa

   Untuk dijadikan panduan wawasan ilmiah tentang Aljabar Lintasan Leavitt Prima dan untuk dijadikan referensi untuk penelitian yang akan datang.

iii. Dosen/Guru

   Dapat dijadiakan bahan referensi untuk guru atau dosen selama pembelajaran berlangsung.

iv. Kampus

   Sebagai sarana nilai plus untuk meningkatkan mutu kampus dengan hasil penelitian mahasiswanya.

v. Kalangan Akademis

Dapat menjadi sarana dalam meningkatkan kemampuan belajar dan kemauan untuk melakukan penelitian lebih baik dan lebih terperinci.

1. 5. Metode Penelitian

Peneliti menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif. Pendekatan deskriptif kualitatif adalah suatu metode pengolahan data dengan cara menganalisis dan menggambarkan semua kondisi atau situasi dari informasi yang dikumpulkan berupa hasil pengamatan, wawancara atau berbagai sumber lain seperti buku-buku yang telah dilakukan oleh peneliti. Lebih singkatnya, pendekatan deskriptif kualitatif memiliki data berupa naratif yang didapat dari hasil pengamatan atau berbagai sumber lain seperti buku-buku. Beberapa contoh dari pendekatan deskriptif kualitatif adalah observasi, wawancara, kuesioner, studi pustakan dan studi dokumen, dari contoh tersebut metode penelitian pada skripsi ini menggunakan pendekatan deskriftif kualitatif studi pustaka atau dapat juga disebut kepustakaan *(library research)* yaitu penelitian yang dilakukan dengan menggunakan data-data yang diperoleh dari berbagai karya tulis seperti hasil penelitian atau tesis. Penelitian ini menggunakan studi kepustakaan karena mengguunakan data-data yang dikumpulkan dari berbagai sumber bacaan seperti buku, jurnal, hasil penelitian terdahulu atau tesis.

Selanjutnya, untuk menyelesaikan penelitian ini penulis membuat langkah-langkah keterkaitan antara sifat prima pada aljabar lintasan Leavitt.

1. Struktur Aljabar
    a. Mendefinisikan gelanggang R yang akan ditunjukkan pada sifat prima
    b. Mendefinisikan lapangan K yang akan digeneralisasikan pada quiver dan rung vektor
    c. Membuktikan ruang vektor atas lapangan K
    d. Menunjukan modul / submodul atas gelanggang R

2. Aljabar Lintasan Leavitt
    a. Menjelaskan quiver yang akan digeneralisasikan pada aljabar lintasan Leavitt
    b. Menunjukan aljabar atas lapangan K
    c. Membuktikan bahwa K-aljabar adalah lapangan K
    d. Menjelaskan bahwa aljabar lintasan merupakan sub-aljabar dari aljabar lintasan Leavitt
    e. Mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt atas lapangan K dan atas gelanggang R
3. Sifat prima pada aljabar lintasan Leavitt
    a. Mendefinisikan sifat prima menggunakan ideal atas gelanggang
    b. Menjelaskan modul dan submodul prima
    c. Menunjukan sifat prima pada aljabar lintasan Leavitt
    d. Membuktikan aljabar lintasan Leavitt prima
    e. Membuktikan karakteristik aljabar lintasan Leavitt prima

Penelitian ini melakukan analisis data deduktif yaitu menganalisis data dari informasi yang bersifat umum yang kemudian memberikan kesimpulan yang lebih spesifik.

Teknik pembuktian penelitian ini menggunakan berbagai teknik pembuktian yaitu: pembuktian langsung, pembuktian tidak langsung, pembuktian dengan kontradiksi, pembuktian dengan contoh penyangkal, pembuktiaan pernyataan ekuivalen, dan pebuktian ketunggalan. Kemudian, ditarik sebuah kesimpulan atas jawaban dari masalah-masalah penelitian. Dalam penarikan kesimpulannya menggunakan bentuk-bentuk dasar menarik kesimpulan, diantaranya yaitu: conjuction, addition, modus ponens, contrustive dilemma, hypothetical syllogism, simplification, discunctive syllogism, modus tollens, destructive dilemma, dan absorption (Wibisono, 2006)

1. 6. Sistematika Penulisan

Secara keseluruhan penelitian ini terdiri atas lima bab yaitu pendahuluan, kajian teori, bab tentang teorema utama, dan bab utama untuk menjawab ruumusan masalah serta bab terakhir adalah penutup.

Bab I pendahuluan, berisi tentang latar belakang ditulisnya karya ilmiah ini, selanjutnya dituliskan rumusan masalah yang ditemukan beserta tujuannya, manfaat penulisan baik bagi penulis, mahasiswa, dosen/guru, kampus dan kalangan akademis, metode penulisan dan sistematika penulisan yang digunakan pada penlitian ini agar lebih terperinci dan jelas.

Bab II membahas tentang konsep-konsep untuk membuktikan suatu struktur dapat memenuhi aksioma-aksioma gelanggang, lapangan, ruang vector dan modul. Konsep-konsep gelanggang ini meliputi pengertian, teorema pembuktian serta contoh baik dari gelanggang, lapangan, ruang vector maupun modul dan hubungannya antara semua struktur yang telah di bahas.

Bab III membahas tentang konsep aljabar lintasan Leavitt. Pada bab ini menjelaskan tentang konsep aljabar lintasan Leavitt melalui konsep graf quiver, aljabar dan k-aljabar yang akan membuktikan aksioma-aksioma yang berlaku pada aljabar lintasan Leavitt.

Bab IV membahas tentang teorama utama untuk menjawab rumusan masalah sebagai tujuan dan fokus penelitian ini. Pada bab ini tidak hanya disajikan karakteristik aljabar lintasan Leavitt tetapi juga pembuktian aljabar lintasan Leavitt yang dipandang dari sifat prima nya atau submodulnya yang memakai ideal sebagai bentuk sifat prima.

Bab V adalah bab penutup, pada bab ini berisi kesimpulan atas pertanyaan-pertanyaan rumusan masalah yang penulis buat secara singkat dan detail. dan pada bab ini juga menjelaskan tentang saran yang penulis sampaikan untuk pembaca terkait karya ilmiyah ini.