# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1. 1. Latar Belakang Masalah

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi oleh satu operasi biner dan minimal satu aksioma. Struktur aljabar dengan satu himpunan diantaranya ialah grup dan gelanggang. Perbedaan antara grup dan gelanggang ialah terlihat pada operasi biner yang mengikatnya. Dalam bukunya Arifin (2000) menggambarkan bahwa grup merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner. Sementara itu, gelanggang ialah struktur aljabar dengan dua operasi biner (Frailegh, 1999). Kemudian, terdapat pula struktur aljabar dengan dua himpunan diantaranya ialah modul, ruang vektor dan aljabar.

Wisbauer (1991) modul adalah suatu struktur aljabar dari suatu himpunan tidak kosong atas sebuah gelanggang yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, berupa operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar, dimana himpunan ini merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan dilengkapi tindakan perkalian skalar. Aksioma – aksioma yang berlaku pada modul serupa dengan aksioma – aksioma yang berlaku pada ruang vektor. Sebagai awal dalam pembahasan modul, ditinjau dari ring yang mempunyai unsur satuan. Ditinjau dari gelanggang ini sehingga didefinisikan modul atas gelanggang yang dapat dibedakan menjadi dua, yaitu modul kanan dan modul kiri.

Sementara itu, pada struktur aljabar terdapat contoh dengan satu himpunan adalah gelanggang. Pada teori gelanggang telah dikenalkan dengan adanya konsep ideal prima. Ideal sejati di $I$ disebut ideal prima apabila untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in I$ berakibat $a \in I$ atau $b \in I$. Risnawita, Irawati, & Alamsyah (2018) mendefinisikan ideal prima pada submodul prima. Biarkan $M$ menjadi modul kiri atas gelanggang $R$ ($M\ R-modul$), submodul $N \neq M$ disebut prima jika $rm \in N$ dengan $r \in N$ dan $m \in R$ mengakibatkan $r$ di $N$ atau $r$ di $(N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$.

Selanjutnya, Misri (2016) diperoleh pendefinisian submodul prima jika $R$ dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri maka disebut submodul prima di $R-modul\ R$. Submodul sejati $A$ di $R-modul\ M$ disebut submodul prima apabila untuk setiap $m \epsilon M$ dan $r \epsilon R$ dengan $rm \epsilon A$ atau $r \epsilon Ann_R\ (M/A)$.

Terdapat suatu pembahasan yang mengatakan submodul prima adalah modul prima. Arifin & Anwar (2010) pada definisi modul prima yaitu " *Jika diberikan $M$ adalah $R-modul$ , maka $M$ disebut $R-modul\ prima$ jika* $\{0\}$ *adalah submodul prima di $M$*". Tetapi dalam pembahasan lain mengatakan submodul prima belum tentu modul prima. Ihsan, Abdy, & B (2019) pada definisi submodul prima lemah yaitu "*Submodul sejati $N$ di $R-modul$ disebut submodul prima lemah jika untuk suatu $r \in R, m \in M$ berlaku jika $0 \neq rm \in N$ maka berlaku $m \in M$ atau $r \in (N:M)$ dengan $(N:M) = \{r \in R\ |rM \subseteq N\}$".* Submodul prima adalah submodul prima yang lemah, tetapi submodul prima lemah belum tentu submodul prima. Selanjutnya, muncul suatu teori yang menggabungkan dua pokok bahasan penting dalam matematika. Teori ini dikenal dengan sebuatan Teori Gelanggang yang didalamnya berisikan mengenai Modul Prima.

Aljabar lintasan adalah aljabar dari lapangan $K$ yang basisnya adalah himpunan semua lintasan dalam quiver. Dalam hal ini, quiver dipandang sebagai graf berarah dan juga dapat dipandang secara aljabar sebagai $Q = (V, E, s, r)$ yang terdiri dari himpunan titik , himpunan sisi $E$ serta dua pemetaan $s, r : V \rightarrow E$ yang memetakan setiap sisi atau tepi $q \in V$ ke titik ujungnya r$(e)$ dan titik sumbernya $s(e)$. Fungsi $s$ disebut sumber (source) sisi dan fungsi $r$ disebut ujung (range) sisi. Jika himpunan $V$ berhingga maka graf $Q$ disebut graf berhingga. Graf $Q$ disebut graf baris berhingga (row-finite graph) jika invers fungsi $s$ berhingga untuk setiap titik.

Kemudian, dari sebarang lapangan $K$ dan quiver $Q$ dapat didefinisikan suatu $K-Aljabar$ yang disebut aljabar lintasan atas lapangan $K$ pada $Q$ yang memiliki basis himpunan semua lintasan yang ada pada quiver tersebut. Sedangkan, modul atas gelanggang adalah generalisasi atas ruang vektor atas

lapangan. Sebarang ruang vektor $V$ atas lapangan $K$, maka dapat dipandang sebagai modul atas gelanggang $R$.

Berlandaskan pada teorema tentang modul prima yaitu dimana modul prima adalah kejadian khusus dari submodul prima ketika submodul prima nya 0. Namun pada pembahasan diatas mengatakan bahwa submodul prima belum tentu modul prima. Oleh karena itu, penulis bermaksud melakukan penelitian mengenai keterkaitan sifat-sifat submodul prima dan submodul prima. Akan dipelajari juga sifat-sifat dari ideal prima dan gelanggang prima mana saja yang bisa dibawa ke sifat submodul dan modul prima. Serta akan diteliti juga keterkaitan antara modul prima pada aljabar lintasan melalui quiver dinkyn tipe $A_n$ dan $D_n$.

## 1. 2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian tersebut, peneliti merumuskan masalah penelitian ini sebagai berikut:

1. Syarat cukup dan perlu submodul dikatakan prima?
2. Syarat cukup dan perlu modul dikatakan prima?
3. Keterkaitan submodul prima dan modul prima?
4. Kaitan antara submodul prima pada aljabar lintasan?
5. Kaitan modul prima pada aljabar lintasan?

## 1. 3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas, penelitian bertujuan untuk:

1. Mengetahui syarat cukup dan perlu submodul dikatakan prima
2. Mengetahui syarat cukup dan perlu modul dikatakan prima
3. Mengetahui keterkaitan antara modul prima dan submodul prima
4. Mengetahui kaitan antara submodul prima pada aljabar lintasan
5. Mengetahui kaitan antara modul prima pada aljabar lintasan

## 1. 4. Manfaat Penelitian

### 1.4.1. Manfaat Teoritis

Hasil penelitian ini dimaksudkan untuk memberikan wawasan baru dan dapat memperkaya pengetahuan mengenai keterkaitan modul prima pada aljabar lintasan. Penelitian ini juga dimaksudkan untuk menjadi konstrukt dari hasil penelitian sebelumya dan menjadi bahan penelitian selanjutnya untuk penelitian sejenisnya. Serta juga diharapkan bisa menjadi rujukan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan tentang modul prima pada aljabar lintasan dan bisa sebagai sarana pengembangan ilmu pengetahuan yang secara teoritis dipelajari di bangku perkuliahan.

## 1. 5. Metode Penelitian

Dalam melakukan penelitian ini, peneliti menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif. Pendekatan deskriptif kualitatif adalah suatu metode pengolahan data melalui analisis dan deskripsi tentang setiap kondisi atau informasi yang dikumpulkan dalam bentuk observasi, wawancara, atau beberapa sumber lain seperti buku-buku yang dilakukan oleh peneliti. Singkatnya, pendekatan kualitatif deskriptif berbentuk data naratif yang diambil dari hasil wawancara, observasi atau berbagai sumber lain seperti buku.

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian studi kepustakaan karena memanfaatkan berbagai sumber bacaan seperti buku, jurnal, dan hasil penelitian sebelumnya. Jenis penelitian studi kepustakaan adalah penelitian yang dilakukan atas dasar data yang diperoleh dari berbagai karya tulis seperti hasil penelitian.

Untuk menyelesaikan penelitian dalam skripsi ini, penulis membuat langkah-langkah dalam keterkaitan mengenai modul prima prima pada aljabar lintasan sebagai berikut:

1. Struktur aljabar
   - Mendefinisikan gelanggang $R$ yang akan dibawa ke sifat prima
   - Mendefinisikan lapangan $K$ yang akan dapat digeneralisasikan pada quiver dan ruang vektor

- Menunjukan ruang vector atas atas lapangan $K$
- Menjelaskan modul dan submodul atas gelanggang $R$

2. Aljabar lintasan
   - Mendefinisikan quiver yang akan digeneralisasikan ke aljabar lintasan
   - Mendefinisikan aljabar untuk ke lapangan $K$
   - Menunjukan bahwa $K - Aljabar$ adalah aljabar lintasan
   - Menjelaskan mengenai aljabar lintasan atau $KQ$
3. Sifat prima pada aljabar lintasan
   - Mendefinisikan sifat ideal prima pada submodul dan modul
   - Menjelaskan keterkaitan submodul prima dan modul prima
   - Membuktikan kaitan antara modul prima dan submodul prima melalui quiver dinkyn

Teknik pembuktian dalam penelitian ini menggunakan teknik pembuktian yang berbeda, yaitu: pembuktian langsung, pembuktian tidak langsung, pembuktian dengan kontradiksi, pembuktian dengan contoh negasi, pembuktiaan pernyataan ekuivalen, dan pembuktian singularitas. Kemudian, ditarik kesimpulan atas jawaban dari permasalahan penelitian. Apabila penalarannya menggunakan bentuk penalaran, meliputi: conjuction, addition, modus ponens, contrustive dilemma, hypothetical syllogism, simplification, discunctive syllogism, modus tollens, destructive dilemma, dan absorption (Wibisono, 2006).

Analisis data yang peneliti gunakan dalam melakukan penelitian ini adalah analisis data deduktif. Analisis data deduktif adalah suatu analisis data dari informasi yang bersifat umum dan kemudian menarik kesimpulan yang bersifat lebih spesifik.

## 1. 6. Sistematika Penulisan

Secara keseluruhan tulisan ini terdiri atas lima bab. Lima bab tersebut adalah pendahuluan, kajian teori, kajian terkait teorema utama dan bab terakhir adalah penutup.

Bab I pendahuluan. Pada bab ini berisi tentang latar belakang ditulisnya karya ilmiah ini, selanjutnya dikemukakan rumusan masalah yang sesuai beserta tujuannya, manfaat peneliti baik manfaat teoritis maupun manfaat praktis, pendekatan dan jenis penelitian, sumber data, teknik pengumpulan data, analisis data dan teknik pembuktian dan sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini.

Bab II membahas kajian teori tentang konsep- konsep untuk membuktikan suatu struktur dapat memenuhi aksioma aksioma gelanggang, lapangan, ruang vektor dan modul. Konsep-konsep dan aksioma-aksioma tersebut meliputi pengertian gelanggang dan teorema-teorema yang membentuknya serta contohnya, pengertian lapangan, pengertian ruang vektor dan modul serta hubungannya.

Bab III membahas kajian tentang konsep aljabar lintasan. Konsep aljabar lintasan, quiver dan . Pada bab ini membahas tentang pengertian quiver, aljabar dan K-aljabar Q juga pembuktian aksioma-aksioma yang berlaku padanya. Selanjutnya dibahas juga tentang pengertian dan operasi-operasi aljabar lintasan atas KQ dan membuktikan aksioma-aksioma yang berlaku padanya.

Bab IV membahas tentang teorema utama. Pada bab ini disajikan pendefinisian ideal prima. Selanjutnya dibahas juga syarat-syarat sifat prima pada submodul dan modul. Selanjutnya, dibahas juga tentang keterkaitan antara submodul prima dengan modul prima, serta keterkaitan antara modul dan submodul prima pada aljabar lintasan.

Bab V adalah bab penutup, pada bab ini berisi kesimpulan atas pertanyaan-pertanyaan rumusan masalah yang penulis buat secara singkat dan detail dan pada bab ini juga menjelaskan tentang saran yang penulis sampaikan untuk pembaca terkait karya ilmiah ini.

IAIN SYEKH NURJATI
CIREBON