BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang

Teori graf pertama kali ditemukan pada Tahun 1736 oleh matematikawan yang bernama L. Euler. Euler berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg secara sederhana dengan graf. Graf digunakan untuk mempresentasikan hubungan antara objek dengan objek yang dinyatakan dengan titik dan garis. Graf adalah himpunan pasangan terurut yang terdiri dari himpunan titik (*vertex*) dan himpunan garis (*edge*). Graf yang dilengkapi dua pemetaan yaitu pemetaan himpunan garis ke himpunan titik disebut graf berarah. Daerah hasilnya yaitu sumber/pangkal (*source*) dan ujung/target (*range*) dari suatu garis dalam graf. Misalkan graf berarah E =(E^0, E^1, r, s) untuk setiap $v \in E^0$ dan $e \in E^1$. Pemetaan dari graf E yaitu r, s : $E^1 \rightarrow E^0$. Artinya graf E adalah himpunan pasangan terurut yang terdiri dari himpunan titik E^0dan himpunan garis E^1. Untuk setiap garis h, maka daerah hasilnya $s(h)$ sebagai sumber/asal (source) dan $r(h)$ sebagai ujung/pangkal (range). Graf dikatakan graf hingga jika E^0dan E^1 hingga. Sebaliknya jika E^0dan E^1 tak hingga maka dikatakan graf tak hingga.

Graf dapat direpresentasikan dengan lapangan. Sehingga Untuk sembarang lapangan K dan graf E dapat didefinisikan suatu K-aljabar yang disebut dengan aljabar atas lapangan K. Menurut Passman (1977) dan Wisbaur (1991), apabila diberikan sembarang grup bahkan semigrup terhadap operasi perkalian dan sembarang lapangan K dapat didefinisikan sebagai K-aljabar asosiatif (Waliyanti, 2013). Dengan demikian aljabar lintasan adalah aljabar atas lapangan dengan basis himpunan semua lintasan yang ada pada graf. Graf dapat diperluas, sehingga akan membentuk graf baru yang disebut graf perluasan. Ide perluasan graf dikemukakan oleh W.G Leavitt pada publikasinya di tahun 1962 dan 1965 dengan menambahkan garis yang berlawanan arah dengan garis nyata (*real edge*) atau yang disebut garis hantu (*gosh edge*).

Pada Tahun 2005 Abrams dan Gonzalo Aranda Pino serta Ara, Moreno dan pardo memperkenalkan aljabar lintasan Leavitt. Untuk Lapangan K dan graf perluasan berhingga E dengan koefisien K dan memenuhi relasi *Cuntz-Krieger* disebut aljabar lintasan Leavitt. Aljabar lintasan Leavitt dilambangkan dengan $L_k(E)$ atau $L(E)$. Sifat-sifat pada aljabar lintasan Leavitt yaitu, jika himpunan titik E^0 berhingga maka $L_k(E)$ merupakan aljabar lintasan leavitt merupakan K-aljabar bertingkat, sembarang himpunan dari lintasan-lintasan yang berbeda merupakan bebas linear dalam $L_k(E)$ dan aljabar lintasan leavitt merupakan K-aljabar berdimensi berhingga jika dan hanya jika himpunan titik E^0 berhingga dan graf asiklik. Begitupun sebaliknya, aljabar lintasan Leavitt merupakan K-aljabar berdimensi tak hingga jika dan hanya jika himpunan titik E^0 tak hingga dan graf siklus.

Sepuluh tahun terakhir ini di Indonesia banyak peneliti yang mengkaji tentang aljabar lintasan Leavitt untuk topik penelitian. Salah satu topik yang menarik dari aljabar lintasan Leavitt adalah dimensi. Adapun definisi dimensi yaitu misal V adalah ruang vektor tak nol, dimensi adalah banyaknya vektor pada suatu basis untuk V dan dinotasikan dengan dim (V). V dikatakan berdimensi hingga jika V direntang oleh himpunan berhingga, begitupun sebaliknya. V dikatakan berdimensi tak hingga jika V direntang oleh himpunan tak hingga. Ruang vektor nol memiliki dimensi 0 tetapi dianggap sebagai ruang vektor berdimensi hingga (Resmawan, 2019). Di Indonesia penelitian tentang dimensi pada aljabar lintasan Leavitt belum ada. Namun, Gane Abrams, Gonzalo Aranda Pino dan M. Siles Molina (2006) telah mengembangkan tentang dimensi hingga pada aljabar lintasan Leavitt pada jurnalnya yang berjudul "*Finite-dimensional Leavitt path algebras*" (Abrams, Pino, & Molina, 2006).

Berdasarkan uraian diatas penulis tertarik untuk mengkaji terkait dimensi pada aljabar lintasan Leavitt. Kajian yang diteliti meliputi aljabar lintasan Leavitt berdimensi hingga, aljabar lintasan Leavitt berdimensi tak hingga dan contoh graf berarah yang dapat merepresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi hingga dan berdimensi tak hingga.

1. 2. Identifikasi Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan, permasalahan yang berhasil penulis identifikasi adalah :

1. Bagaimana pola umum dimensi hingga pada aljabar lintasan Leavitt.
2. Bagaimana pola umum dimensi tak hingga pada aljabar lintasan Leavitt.
3. Bagaimana bentuk graf pada aljabar lintasan Leavitt yang berdimensi hingga.
4. Bagaimana bentuk graf pada aljabar lintasan Leavitt yang berdimensi tak hingga.

1. 3. Batasan Masalah

Berdasarkan identifikasi masalah yang sudah penulis jelaskan diatas, penelitian ini dibatasi :

1. Graf yang digunakan adalah graf berarah yang memiliki orientasi arah. Daerah hasilnya yaitu sumber/pangkal (*source*) dan ujung/target (*range*) dari suatu garis dalam graf.
2. Dimensi yang digunakan pada aljabar lintasan Leavitt $L_k(K)$ dimensi hingga dan tak hingga.
3. Yang dikaji dalam dimensi hingga dan dimensi tak hingga pada aljabar lintasan Leavitt ini adalah bentuk graf.

1. 4. Rumusan Masalah

Berdasarkan batasan masalah yang telah dipaparkan, rumusan masalah yang berhasil penulis identifikasi adalah :

1. Apa keterkaitan graf asiklik dan himpunan titik berhingga dengan dimensi hingga pada aljabar lintasan Leavitt ?
2. Apa keterkaitan graf siklus dan himpunan titik tak hingga dengan dimensi tak hingga pada aljabar lintasan Leavitt ?

3. Bagaimana contoh graf yang dapat merepresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi hingga ?
4. Bagaimana contoh graf yang dapat mempresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi tak hingga ?

1. 5. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan diatas, tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui keterkaitan graf asiklik dan himpunan titik berhingga dengan dimensi hingga pada aljabar lintasan Leavitt.
2. Untuk mengetahui keterkaitan graf siklus dan himpunan titik tak hingga dengan dimensi tak hingga pada aljabar lintasan Leavitt.
3. Untuk mengetahui contoh graf yang dapat merepresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi hingga.
4. Untuk mengetahui contoh graf yang dapat merepresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi tak hingga.

1. 6. Manfaat Hasil Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah:

1.6.1. Manfaat Teoritis

Secara teoritis, penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran tentang kajian dimensi pada aljabar lintasan Leavitt.

1.6.2. Manfaat Praktis

a. Penulis

Sebagai pembelajaran untuk memahami serta menentukan pola umum aljabar lintasan Leavitt yang berdimensi hingga dan berdimensi tak hingga, sehingga dapat menambah wawasan ilmu pengetahuan.

b. Mahasiswa

Sebagai bahan rujukan mengenai aljabar lintasan Leavitt yang berdimensi hingga dan berdimensi tak hingga.

c. Lembaga

Sebagai inventaris teori dalam pengembangan kajian aljabar lintasan Leavitt khususnya pada kajian dimensi hingga dan dimensi tak hingga dari suatu aljabar lintasan Leavitt.

1. 7. Metode Penelitian

Dalam melakukan penelitian ini, peneliti menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif. Pendekatan deskriptif kualitatif adalah suatu metode pengolahan data dengan cara menganalisis, menggambarkan dan menggambarkan semua kondisi atau situasi dari informasi yang dikumpulkan berupa hasil pengamatan, wawancara atau berbagai sumber lain seperti buku-buku yang telah dilakukan oleh peneliti. Lebih singkatnya, pendekatan deskriptif kualitatif itu datanya berupa naratif yang didapat dari hasil wawancara, pengamatan atau berbagai sumber lain seperti buku-buku.

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka, yaitu kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian (Zed, 2003).

Penelitian kepustakaan adalah kegiatan penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan informasi dan data dari berbagai macam material yang ada di perpustakaan seperti buku, hasil penelitian sebelumnya, artikel, catatan, jurnal yang berkaitan dengan masalah yang ingin dipecahkan (Sari, 2020).

Dalam penelitian ini, penulis melakukan kegiatan studi pustaka, yaitu dengan mengkaji sumber referensi yang berkaitan dengan teori aljabar lintasan dan teori graf, serta jurnal atau artikel yang mengkaji tentang topik dimensi pada aljabar lintasan Leavitt.

1. 8. Kerangka Pemikiran

Graf berarah $E = (E^0, E^1, r, s)$ untuk setiap $v \in E^0$ dan $e \in E^1$. Pemetaan dari graf E yaitu $r, s : E^1 \rightarrow E^0$. Artinya graf E adalah himpunan pasangan terurut yang terdiri dari himpunan titik E^0dan himpunan garis E^1. Selanjutnya graf berarah E dan lapangan K atau aljabar lintasan KE dapat didefinisikan sebagai K-aljabar bebas dengan basis lintasan-lintasan di E yang memenuhi syarat berikut $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ untuk setiap $v_i, v_j \in E^0$dan $e_i = e_i r(e_i) = s(e_i) e_i$ untuk setiap $e_i \in E^1$. Ketika graf berarah E diperluas menjadi graf perluasan $\hat{E}$ (*extended graph* $\hat{E}$), maka dapat membentuk aljabar lintasan Leavitt dengan memenuhi relasi *Cuntz-Kreager* yang dinotasikan dengan $L_k(E)$. Sehingga aljabar lintasan Leavitt dapat didefinisikan sebagai K-aljabar asosiatif yang dihasilkan oleh satu himpunan $\{v | v \in E^0\}$ dari idempoten orthogonal berpasangan dengan $\{e | e \in E^1\} \cup \{e^* | e \in E^1\}$ yang memenuhi relasi berikut :

i. $s(e)e = er(e) = e$ $\quad \forall\, e \in E^1$

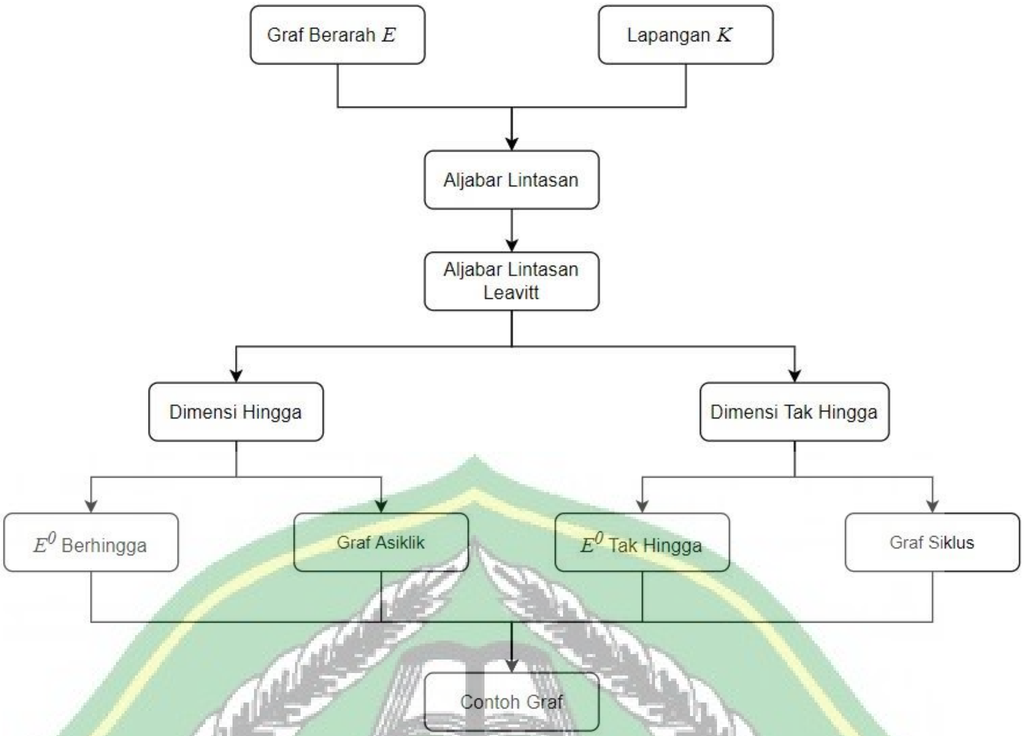
ii. $r(e)e^* = e^* s(e) = e^*$ $\quad \forall\, e \in E^1$

iii. $e^* e' = \delta_{e,e'} r(e)$ $\quad \forall\, e, e' \in E^1$ (CK1)

iv. $v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e) = v\}} ee^*$ $\quad \forall\, v \in E^0$ dan s^{-1} tak kosong (CK2)

Pada aljabar lintasan Leavitt memiliki sifat yang serupa dengan aljabar lintasan, salah satunya yaitu aljabar lintasan Leavitt adalah K-aljabar berdimensi hingga jika E^0 berhingga dan grafnya asiklik. Begitupun sebaliknya, aljabar lintasan Leavitt adalah K-aljabar berdimensi tak hingga jika E^0 tak berhingga dan grafnya siklus.

Agar lebih mudah dipahami, akan disajikan dalam bentuk diagram alir sebagai berikut :



Gambar I.1
Diagram Alir

1. 9. Sistematika Penulisan

Bab I menggambarkan isi penelitian secara keseluruhan agar pembaca dapat mengetahui apa yang menjadi pembahasan dalam penelitian ini. Bab ini memiliki beberapa sub bab bahasan, yaitu: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat hasil penelitian, metode penelitian, kerangka pemikiran dan sistematika penulisan.

Bab II berisi teori-teori tentang struktur aljabar yang digunakan sebagai rujukan dalam pembahasan pada penelitian ini. Struktur aljabar yang dimaksud meliputi himpunan dan pemetaan, ruang vektor, grup, gelanggang dan graf.

Bab III berisi teori-teori yang digunakan sebagai rujukan dalam Bab pembahasan. Pada Bab III membahas teori-teori tentang aljabar atas lapangan, aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt.

Bab IV berisi pembahasan dari dimensi pada aljabar lintasan Leavitt, kajian yang menjadi pembahasan diantaranya dimensi hingga pada aljabar lintasan

Leavitt, dimensi tak hingga pada aljabar lintasan Leavitt, contoh graf berarah yang dapat merepresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi hingga dan contoh graf berarah yang dapat merepresentasikan aljabar lintasan Leavitt berdimensi tak hingga.

Bab V berisi kesimpulan yang diperoleh dari Bab IV, dan disertai dengan saran terkait hasil penelitian.